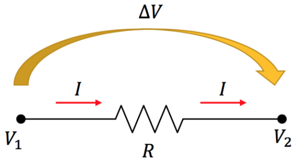
Thermodynamik II - Übung 8

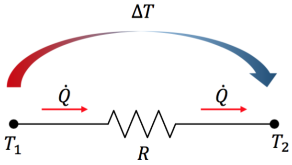
Nicolas Lanzetti

Heutige Themen

- Zusammenfassung letzter Woche;
- Rippen.

Zusammenfassung letzter Woche





- In der Elektrotechnik:

$$\Delta V = I \cdot R. \tag{1}$$

- In der Termodynamik:

$$\Delta T = \dot{Q} \cdot R_{\text{thermisch}}. \tag{2}$$

Zusammenfassung letzter Woche

Die Wärmewiderstande sind:

- ebene Wand:
$$R_{\text{eben}} = \frac{b}{A \cdot \lambda}, \tag{3}$$
mit b Dicke der Wand;
- zylindrische Wand:
$$R_{\text{zyl}} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \cdot \lambda \cdot L}, \tag{4}$$
mit L Länge des Zylinders.
- konvektiv:
$$R_{\text{konv}} = \frac{1}{A \cdot \alpha}, \tag{5}$$
aus $\dot{Q} = A \cdot \alpha \cdot (T_s - T_\infty)$.

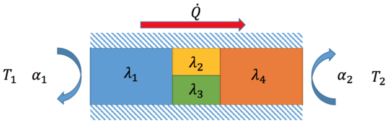
Zusammenfassung letzter Woche

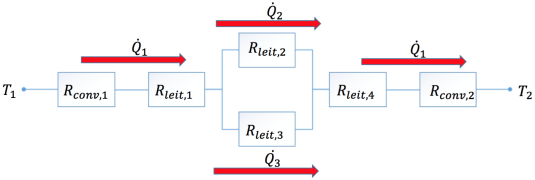
Man darf die Wärmewiderstand nutzen, wenn das Problem folgende Voraussetzungen erfüllt:

- stationär;
- eindimensional;
- keine Wärmequelle (dünne Heizfolie ist erlaubt).

Zusätzlich bekommt man mit diesem Verfahren kein Temperaturprofil.

Zusammenfassung letzter Woche





$$R_{\text{tot}} = R_{\text{conv},1} + R_{\text{leit},1} + \frac{R_{\text{leit},2} \cdot R_{\text{leit},3}}{R_{\text{leit},2} + R_{\text{leit},3}} + R_{\text{leit},4} + R_{\text{conv},2}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_{\text{tot}}}.$$

Zusammenfassung letzter Woche

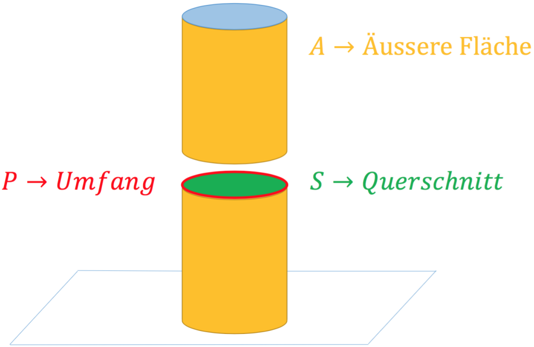
Die Biot-Zahl ist definiert als

$$\mathrm{Bi} = \frac{R_{\text{leit}}}{R_{\text{conv}}} = \frac{\frac{L}{A \cdot \lambda}}{\frac{1}{A \cdot \alpha}} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}, \tag{6}$$

mit L charakteristische Länge. Dei Biot-Zahl ist ein Mass, um zu entscheiden welcher Wärmeübertragung dominant ist:

- $\mathrm{Bi} \ll 1$: Konvektion ist dominant;
- $\mathrm{Bi} \approx 1$: keine dominante Wärmeübertragung;
- $\mathrm{Bi} \gg 1$: Wärmeleitung ist dominant.

Rippen - Notation



Rippengleichung

Energieerhaltung auf ein Kontrollvolumen zylinderisches Kontrollvolumen liefert

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \cdot T\right) = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial x}(S \cdot u \cdot T) - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} - \dot{Q}''_{\text{Strahlung}} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}. \tag{7}$$

Vereinfachte Rippengleichung

- Querschnitt S ist constant;
- Kein Fliessen von Material in der Rippe;
- Stationär;
- Keine Wärmequelle;
- Keine Strahlung.

$$\begin{aligned}\cancel{\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \cdot T\right)} = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \cancel{\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial x}(S \cdot u \cdot T)} \\ - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) + \cancel{\dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}} \\ - \cancel{\dot{Q}''_{\text{Strahlung}} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}}\end{aligned} \tag{8}$$

Vereinfachte Rippengleichung

Daraus folgt (mit $\mathrm{d}A = P \cdot \mathrm{d}x$)

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - P \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{P \cdot \alpha}{\lambda \cdot S} \cdot (T - T_\infty) = 0 \tag{10}$$

Mit $\theta = T - T_\infty$ und $m^2 = \frac{P \cdot \alpha}{\lambda \cdot S}$:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2 \cdot \theta = 0. \tag{11}$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\theta(x) = C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot x}. \tag{12}$$

Erste Randbedingungen

Mit bekannter Fusstemperatur T_F folgt:

$$T(x=0) = T_F \qquad \Rightarrow \qquad \theta(x=0) = T_F - T_\infty = \theta_F \tag{13}$$

Einsertzen liefert:

$$\theta(x=0) = C_1 + C_2 = \theta_F. \tag{14}$$

Für die zweite Randbedingung gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Adiabater Kopf;
- Konvektion am Kopf;
- Bekannte Temperatur am Kopf;
- Unendliche lange Rippe.

Zweite Randbedingungen: Adiabater Kopf

Für eine Rippe mit Länge L mit adiabatem Kopf ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0, \tag{15}$$

d.h.

$$C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = 0. \tag{16}$$

Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m \cdot (L - x))}{\cosh(m \cdot L)}, \tag{17}$$

wobei $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ und $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

Zweite Randbedingungen: Konvektion am Kopf

Für eine Rippe mit Länge L ist

$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = \alpha \cdot \underbrace{\left(T(x=L) - T_\infty\right)}_{\theta(x=L)} = \alpha \cdot \theta(x=L), \qquad (18)$$

d.h.

$$C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \left(C_1 \cdot e^{m \cdot L} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L}\right). \qquad (19)$$

Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m \cdot (L-x)) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \sinh(m \cdot (L-x))}{\cosh(m \cdot L) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \sinh(m \cdot L)}. \qquad (20)$$

Zweite Randbedingungen: Bekannte Temperatur am Rippenkopf

Für eine Rippe mit Länge L ist

$$\theta(x = L) = \theta_K = T_K - T_\infty, \tag{21}$$

d.h.

$$C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L} = \theta_K. \tag{22}$$

Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\frac{\theta_K}{\theta_F} \cdot \sinh(m \cdot x) + \sinh(m \cdot (L - x))}{\sinh(m \cdot L)}. \tag{23}$$

Zweite Randbedingungen: Unendlich lange Rippe

Für eine Rippe mit Länge $L \to \infty$ ist

$$T(x \to \infty) = T_\infty. \tag{24}$$

d.h.

$$C_1 \cdot e^{m \cdot \infty} + \cancel{C_2 \cdot e^{-m \cdot \infty}} = 0. \tag{25}$$

Somit ist $C_1 = 0$ und $C_2 = \theta_F - C_1 = \theta_F$.
Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot e^{-m \cdot x}. \tag{26}$$

Rippenwirkungsgrad

Der Rippenwirkungsgrad ist definiert als

$$\eta_R = \frac{\text{Übertragene Wärmemenge}}{\text{Maximal übertragene Wärmemenge}}, \tag{27}$$

wobei die maximale Wärmemenge, die die Rippe übertragen könnte, wenn ihre gesamte Oberfläche die Temperatur des Rippenfusses annehmen würde.

Rippenwirkungsgrad

Für eine Rippe mit adiabatem Kopf gilt

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m \cdot (L - x))}{\cosh(m \cdot L)}, \tag{28}$$

und somit

$$\begin{aligned} \dot{Q} = \dot{Q}_F &= -\lambda \cdot S \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\lambda \cdot S \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \\ &= -\lambda \cdot S \cdot (-m) \cdot \theta_F \cdot \frac{\sinh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L)} \\ &= \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \tanh(m \cdot L). \end{aligned} \tag{29}$$

Rippenwirkungsgrad

Die maximal übertragene Wärmemenge ist

$$Q_{\text{max}} = \alpha \cdot A \cdot \theta_F = \alpha \cdot P \cdot L \cdot \theta_F. \tag{30}$$

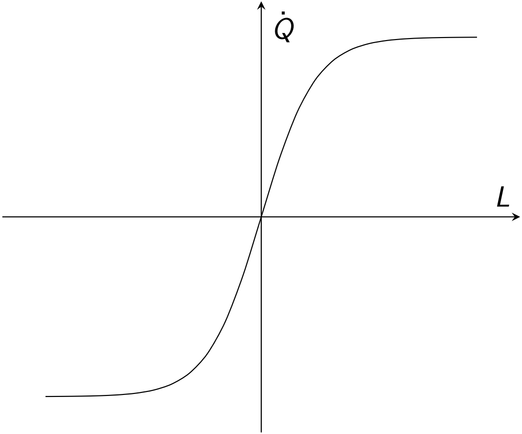
Der Wirkungsgrad ist dann

$$\begin{aligned} \eta_R &= \frac{\lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \tanh(m \cdot L)}{\alpha \cdot P \cdot L \cdot \theta_F} \\ &= \frac{m \cdot \tanh(m \cdot L)}{\frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S} \cdot L} \\ &= \frac{\tanh(m \cdot L)}{m \cdot L}, \end{aligned} \tag{31}$$

wobei $m^2 = \frac{P \cdot \alpha}{\lambda \cdot S}$.

Rippenwirkungsgrad

$$\dot{Q}_F = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \tanh(m \cdot L) \tag{32}$$



Fragen?