TECHNISCHE MECHANIK

Zusammenfassung zur Vorlesung von
Dr. S. Kaufmann

Lukas Cavigelli, Juli 2010
lukasc@ee.ethz.ch

GRUNDLAGEN

FREIHEITSGRAD

$$f = \left(\sum_k f_k\right) - b$$

b: feste Bindungen (lin. unabh. Bindungs-Gl.)

Starrer Körper: $f = 6$, Ebenes Pendel: $f = 1$

GESCHWINDIGKEIT

Geschwindigkeit: $\vec v = \dot{\vec r} = \dot x\vec{e_x} + \dot y\vec{e_y} + \dot z\vec{e_z}$
Schnelligkeit: $s = |\vec v|$
Beschleunigung: $\vec a = \dot{\vec v} = \ddot{\vec r}$

Zylinderkoordinaten:
$(\varrho$:Radius auf xy-Ebene, φ: Winkel auf xy-Ebene, $z)$
$\vec r = \varrho\vec{e_\varrho} + z\vec{e_z}$
$\vec v = \dot{\vec r} = \dot\varrho\vec{e_\varrho} + \varrho\dot{\vec{e_\varrho}} + \dot z\vec{e_z}$, $s = |\vec v| = \sqrt{\dot\varphi^2 + \varrho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2}$
$\vec a = (\ddot\varrho - \varrho\dot\varphi^2)\vec{e_\varrho} + (\varrho\ddot\varphi + 2\dot\varrho\dot\varphi)\vec{e_\varphi} + \ddot z\vec{e_z}$
Ebene Polarkoordinaten:
$\vec r = r\vec{e_r}$, $\vec v = \dot r\vec{e_r} + r\dot\varphi\vec{e_\varphi}$
$\vec a = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\vec{e_r} + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)\vec{e_\varphi}$
Umrechnen:
$e_\varrho = \cos(\varphi)\, e_x + \sin(\varphi)\, e_y$
$e_\varphi = -\sin(\varphi)\, e_x + \cos(\varphi)\, e_y$
$e_x = \cos(\varphi)\, e_\varrho - \sin(\varphi)\, e_\varphi$
$e_y = \sin(\varphi)\, e_\varrho + \cos(\varphi)\, e_\varphi$

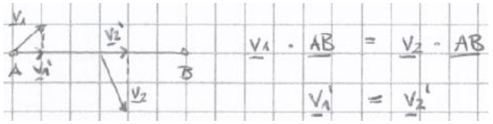
SATZ DER PROJIZIERTEN GESCHWINDIGKEITEN

Die Projektionen $\vec v_p', \vec v_q'$ der Geschwindigkeiten von zwei beliebigen Punkten P und Qeines *starren Körpers* auf ihre Verbdindungsgerade $\overline{QP}$ sind gleich: $v_p' = v_q'$

$$\Rightarrow \vec{PQ}\cdot\vec{v_P} = \vec{PQ}\cdot\vec{v_Q} \Leftrightarrow \vec e\cdot\vec{v_p} = \vec e\cdot\vec{v_q}, \qquad \vec e = \frac{(\vec{r_p} - \vec{r_q})}{|\vec{r_p} - \vec{r_q}|}$$

blabla:
BILD

Eine starre ebene Bewegung ist (momentan) eine Translation oder Rotation.



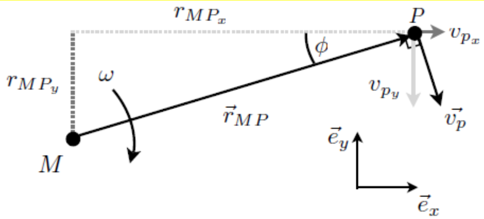
MOMENTANZENTRUM KONSTRUIEREN

Das **Momentanzentrum** ist das Zentrum der Rotation:
1. Rechtwinklig auf alle Geschwindigkeiten, z.B. alle Wägeli SdpG verwenden!
2. Drehrichtung bestimmen

Momentane Translation oder Rotation:
Translation, wenn $\vec{v_a} = \vec{v_b}$, sonst Rotation.

SATZ VOM MOMENTANZENTRUM

2D: $v_p = \omega\cdot r_{mp}$ (Achtung:Beträge)
3D: $\vec{v_p} = \vec\omega\times\vec{r_{mp}}$, ω:Rotationsgeschw.



Um die Geschwindigkeit vektoriell zu ermitteln muss man diese komponentenweise ausrechen:

$$\vec{v_p} = \begin{pmatrix}\omega\cdot r_{mp_y}\\ -\omega\cdot r_{mp_x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega\cdot|r_{mp_y}|\cdot\sin(\phi)\\ -\omega\cdot|r_{mp_y}|\cdot\cos(\phi)\end{pmatrix}$$

Vorgehen: bei Geschwindgkeitsber. an komplexen Systemen
1. Starrkörper und Momentanzentrum ermitteln
2. SdpG auf Verbindungsgeraden von Starrkörpern anwenden
3. Darüber neue Momentanzentren aufstellen und verbleibende Geschwindigkeiten ausrechnen

KINEMATE

Kinemate:
$\{\vec{v_B}, \vec\omega\}$, $\vec{v_B}$:Translationsgeschw., $\vec\omega$: Rotationsgeschw.
Eine starre Bewegung ist (momentan) entweder eine Translation oder eine Rotation:
Invarianten(Bezugssystem-unabhängig): $\vec{I_1} = \vec\omega$, $I_2 = \vec\omega\cdot\vec{v_B}$
Translation: $\vec{I_1} = \vec\omega = 0$
Rotation: $\vec{I_1} = \vec\omega \neq 0$, $I_2 = \vec\omega\cdot\vec{v_B} = 0$
Schraubung: $I_2 = \vec\omega\cdot\vec{v_B} \neq 0$

Kreiselung: Starrkörperbewegung im Raum, wobei ein Punkt fixiert ist. Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation.

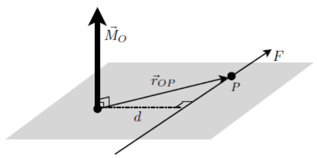
$$\vec{v_P} = \vec{v_B} + \vec\omega\times\vec{r_{BP}}$$

Rotation: Ein Punkt bleibt fix. Es gilt: $\vec{v_p} = \vec\omega\times\vec{r_{OP}}$. Die Gerade durch Fixpunkt O in Richtung ω heisst **Momentanachse**.

Soll die **Kinemate an einem unbekannten Punkt** bestimmt werden, ω zuvor bestimmen mit bekannten Punkten!

KRAFT UND MOMENT

Actio = Reactio: Jede Kraft hat eine entsprechende Gegenkraft.
$\vec{M_O} = \vec{r_{OP}}\times\vec F$, $|\vec{M_O}| = d\cdot|\vec F|$, d:Hebelarm



STATIK

KRÄFTEGRUPPEN & LEISTUNG

Resultierende: $\vec R = \sum_{k=1}^N \vec{F_k}$

Unterschiedliche Kräftegruppen, die auf einen starren Körper dieselbe Wirkung haben, heissen **äquivalent**.

Leistung einer Kräftegruppe:

$$\wp = \vec R\cdot\vec{v_O} + \underbrace{\vec{M_O}\cdot\vec\omega}_{|\vec{M_O}||\vec\omega|\cos(\alpha)}$$

oder $\wp = \vec R\cdot\vec{v_P}$, wenn $P \in$ Wirklinie
Statische Äquivalenz:

$$\wp(\{F_i\}) = \wp(\{G_i\})$$

$\vec R$:Resultierende Kraft
Transformationsregel:

$$\vec{M_P} = \vec{M_O} + \vec{r_{PO}}\times\vec R$$

DYNAME

$\{\vec R, \vec{M_O}\}$, $\vec R$:Resultierende, $\vec{M_O}$result. Moment
Berechnung:

$$\vec{M_O} = \left(\sum_k \vec{M_k}\right) + \left(\sum_j \vec{r_{O,j}}\times\vec{F_j}\right)$$

Invarianten:
$\vec{I_1} = \vec R$, $I_2 = \vec R\cdot\vec{M_O}$
Fallunterscheidung:

Gleichgew./Nullsystem	$\vec R = \vec 0$	$\vec{M_O} = \vec 0$
Moment (Kräftepaar)	$\vec R = \vec 0$	$\vec{M_O} \neq \vec 0$
Einzelkraft	$\vec R \neq 0$	$I_2 = \vec R\cdot\vec{M_O} = 0$
Schraube	$\vec R \neq 0$	$I_2 = \vec R\cdot\vec{M_O} \neq 0$

Moment zuerst zum Punkt transformieren!(siehe Formel oben)

PARALLELE KRÄFTEGRUPPE (BLABLAA)

Dipolmoment der Kräftegruppe: $\vec N = \sum_{k=1}^N F_k\vec{r_k}$
Moment: $\vec M = \vec N\times\vec e$
$\vec e$: Richtungsvektor der parallelen Kräftegruppe

KRÄFTE- & MASSENMITTELPUNKT

Dipolmoment einer Kräftegruppe:

$$\vec N := \sum_{k=1}^N |\vec{F_k}|\vec{r_k} \ \ und\ \ \vec M = \vec N\times\vec e$$

Schwerpunkt eines Körpers: Dot-Product??

$$\vec{r_C} = \frac{1}{\vec R}\sum_{k=1}^N \vec{F_k}\vec{r_k}, \qquad \vec R = \sum_{k=1}^N \vec{F_k}$$

3D: $\vec{r_C} = \frac{1}{m}\iiint \vec r\,dm$, m:Masse
2D: $\vec{r_C} = \frac{1}{A}\iint \vec r\,dA$, A:Gesamtfläche
1D: $\vec{r_C} = \frac{1}{L}\int \vec r\,dl$, L:Länge

PRINZIP DER VIRTUELLEN LEISTUNGEN

Eine **Ruhelage** ist eine Lage, in der das System in Ruhe bleibt, wenn es zu einem beliebigen Zeitpunkt in Ruhe war.
PdvL: Ein System befindet sich genau dann in Ruhelage, wenn in dieser Lage die gesamtleistung aller angreiffenden Kräfte bei jedem virtuellen (nicht zulässigen) Bewegungszustand verschwindet:

$$\tilde\wp = \tilde\wp^{(i)} + \tilde\wp^{(a)} = 0, \qquad \forall\{\tilde v\}$$

3D: $\wp = \vec F\cdot\vec{v_p}$, 2D: $\wp = |\vec F|\cdot|\vec{v_p}|\cdot\sin(\phi)$
Vorgehen:
1. Stab entfernen und Ersatzkräfte einführen
2. Einzelne starre Körper markieren (können einzelne Stäbe sein) und in ihren Momentanzentren Winkelgeschwindigkeiten einführen (ausser ein SK ist fix).
3. Verhältnis der Winkelgeschw. besimmen: $w_1 = 2w_2 = \cdots$
4. Geschwindigkeit der Punkte, in denen Kräfte angreifen, in Abhängigkeit der Winkelgeschw. berechnen.
5. Kräfte als Vektoren aufschreiben.
6. Skalarprodukte von Kräfte-Geschwindigkeits-Paaren bestimmen.
7. Deren Summe gleich null setzen.
8. Zugstab, wenn $S > 0$, wenn S gegeneinander

HAUPTSATZ DER STATIK

In einer Ruhelage müssen alle (äusseren) Kräfte im Gleichgewicht sein.

$$\vec R = \vec 0, \qquad \vec{M_O} = 0$$

$$\vec R = \vec 0\text{: Komponentenbedingungen} \begin{cases} R_x = 0\\ R_y = 0\end{cases}$$

$$\vec{M_O} = \vec 0\text{: Momentenbedingungen} \begin{cases} M_{P,x} = 0\\ M_{P,y} = 0\end{cases}$$

Vorgehen zur Lösung von Statikproblemen:
1. System freischneiden
2. Kräfte einführen (am besten mit 2 Komponenten in der Ebene oder 3 Komponenten im Raum)
3. Koordinatensystem einführen
4. Abzählen der Gleichungen und Unbekannten (Bestimmtheit des Systems ermitteln)
5. Nach Lagerkräften auflösen
6. Ergebnis diskutieren (was muss gelten damit, Materialbelastbarkeit)

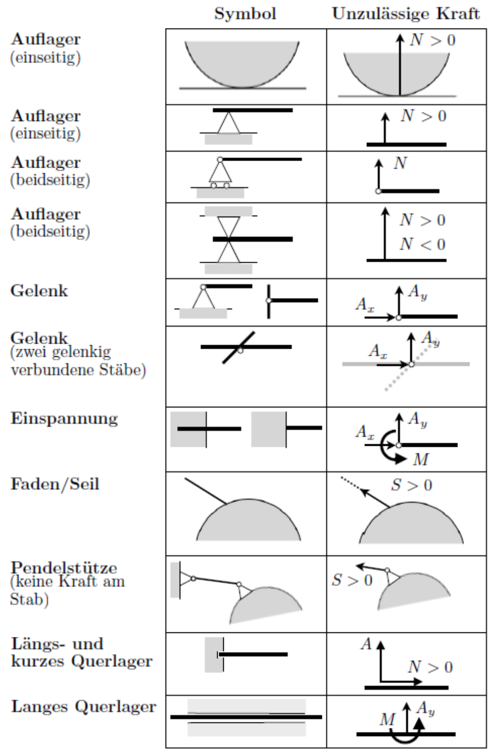
Wann **welcher Satz?**:
HS der Statik zur Berechnung von Lager- und Bindungskräften.
PdvL bei einer ober wenigen Kräften.
Tipp: MB i.d.R. 1mal pro Stab

RUHELAGE

$RL \Leftrightarrow \tilde\wp = 0,\ \forall\{\tilde v\}$
$RL \Rightarrow \vec R = \vec 0, \vec M = \vec 0$, HS d. Statik
$RL \Leftrightarrow \vec R = 0, \vec M = 0$ für 1 St. Körper

BINDUNGEN

In jeder Bindung muss vorerst eine volständige Dyname eingeführt werden. Ist die Bewegung **reibungsfrei**, können einige Komponenten weggelassen werden.



Pendelstütze: Keine Kräfte am Stab (ähnlich wie Faden), gewichtslos und reibungsfrei:

Ein System heisst **statisch bestimmt**, wenn Lagerkräfte und –momente eindeutig aus den Gleichgew.-Bed. berechnen lassen: #Unbekannte = #lin. unabh. Gleichungen

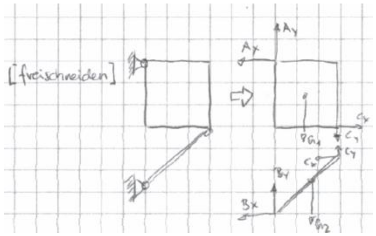
Ein System heisst **kinematisch bestimmt**, falls auf Grund der Lagerung keine zulässigen Bewegungen möglich sind.

Das **PdvL** liefert eine zusätzliche Gleichung.

MERKE: System aus mehreren reibungsfrei gelenkig verbundenen Körpern bestehen, können getrennt werden. Dadurch ergeben sich zusätzliche, linear unabhängige Gleichungen.

VORGEHEN BEIM LÖSEN DER AUFGABEN

Beispiel:



REIBUNG

Um in der Bindung eine vollständige Dyname zu erhalten, müss zur Normalkraft N noch eine Reibungskraft F eingeführt werden

Haftreibung ($\vec{v}_B = 0$):

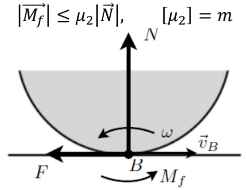
$$|\vec{F}| \le \mu_0 |\vec{N}|$$

Gleitreibung ($\vec{v}_B \neq 0$):

$$|\vec{F}| = \mu_1 |\vec{N}|, \qquad \vec{F} = -\mu_1 |\vec{N}| \frac{\vec{v}_B}{|\vec{v}_B|}$$

Rollreibung:

$$|\vec{M_f}| \le \mu_2 |\vec{N}|, \qquad [\mu_2] = m$$



$\vec{M_f}$ entgegen $\vec{\omega}$

Kippen:

Normalkraft muss am Objekt angreiffen, sonst kippt es!

Wo die Normalkraft $\vec{N}$ angreift ist zunächst ungewiss. Sie ist um einen Abstand e vom Mittelpunkt verschoben. Damit der Körper nicht kippt, muss bei Grundseitenlänge a des Körpers folgendes gelten:

$$e \le \frac{a}{2}$$

DYNAMIK

NEWTON'SCHES BEWEGUNGSGESETZ

$$m\vec{a} = \vec{R}$$

TRÄGHEITSKRÄFTE, PDVL ERWEITERT

Die **Trägheitskraft** ist eine fiktive Kraft, weil sie das Reaktionsprinzip verletzt. Die **Trägheitskraftdichte** ist gegeben durch:

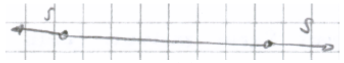
$$\vec{f}^{(t)} = -\rho\vec{a}$$

Für ein infinitesimales Volumenelement dV kann man ein infinitesimales Element der Trägheitskraft berechnen:

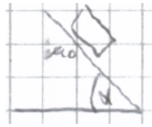
$$d\vec{F}^{(t)} = -\rho\vec{a}\, dV = -\vec{a}\, dm$$

KRAFT AM STAB

$+ \to$ Zugkraft, $- \to$ Druckkraft



$\tan(\alpha) > \mu_0 \to$ Bewegung



FEDER

1D: $F_{Feder} = -k \cdot \Delta l$

3D: $\vec{F}_{Feder} = -k\overrightarrow{(\Delta l)}$

BESCHLEUNIGUNG

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y} + \ddot{z}\vec{e_z}$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{a}(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\varrho} + (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} + \ddot{z}\vec{e_z}$$

in Polarkoordinaten:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi}$$

Bsp. Kreisbewegung:

$$r: Radius, \varphi: Auslenkung$$

$$\vec{a} = +\underbrace{r\dot{\varphi}^2\vec{e_r}}_{radial} + \underbrace{r\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi}}_{tangential}$$

LÖSUNG DER AUFGABEN

1. Freischneiden
2. Allg. Lage zeichnen (nicht Ausgang-/Ruhelage)
3. Koordinatensystem einführen
4. $m\ddot{x} = Rx = F_{1_x} + F_{2_x} + \cdots + F_{N_x}$
   $m\ddot{y} = R_y = F_{1_y} + F_{2_y} + \cdots + F_{N_y}$
5. Bewegungs DGL
6. Anfangsbedingungen

BEISPIEL: UNGEDÄMPFTE SCHWINGUNG

Freiheitsgrad 1.

Anfangsbedingungen:

$y(0) = \dot{y}(0) = 0.$

Aufstellen des **Newton'schen Gesetzes** ergibt:

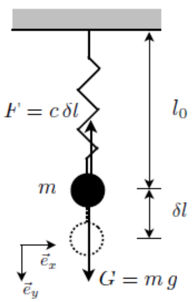
$$\vec{R} = m\,g - c\,\delta l = m\ddot{y}$$

Man setze: $\delta l = l - l_0 = y$

Man erhält die Bewegungs-DGL des Systems:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}y = g, \qquad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

Verwende Ansatz:



$$\ddot{x} + \omega^2 x = k, \qquad x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) + \frac{k}{\omega^2}$$

Auflösen des AWP und der DGL ergibt:

$$y(t) = -g\frac{m}{c}\cos\left(t\sqrt{\frac{c}{m}}\right) + g\frac{m}{c}$$

Erklärung der Grössen:

$-g\frac{c}{m}$: Amplitude, $\sqrt{\frac{c}{m}} = \omega$: Kreisfrequenz, $g\frac{c}{m}$: Verschiebung

IMPULS, MASSENMITTELPUNKT & DRALL

MASSENTRÄGHEITSMOMENTE

Massenpunkt: $I_O = mr^2$

hom. Stab: $I_O = \frac{ml^2}{3}$

hom. Scheibe: $I_O = \frac{mR^2}{2}$

IMPULS- UND MASSENMITTELPUNKTSATZ

Der **Impuls** ist definiert durch:

$$\vec{p} = \iiint_B \vec{v}\, dm$$

Daraus folgt der **Impulssatz**:

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{R}$$

Die beiden Beziehungen liefern den **Massenmittelpunktsatz**:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} = \vec{R}$$

DRALLSATZ

Bei einer starren Rotation um den Punkt 0 ergibt sich das **Moment** $\vec{M}_0$:

$$\vec{M}_0 = \iiint_B \vec{r} \times \vec{a}\, dm$$

Aus der Gleichung folgt die Definition des **Dralls** $\vec{L}_0$:

$$\vec{L_O} = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v}\, dm$$

Die Verbindung dieser eziehungen liefert den **Drallsatz**:

$$\dot{\vec{L}}_0 = \frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \vec{M}_0$$

Ähnlich wie beim Moment gilt für den relativen Drall $\vec{L}_C$ bezüglich des Massenmittelpunktes C:

$\vec{L_O} = \vec{r_C} \times \vec{p} + \vec{L_C}$, $\quad \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C$, $\quad C$:M.m.Pkt., $\quad P$:Impuls

MASSENTRÄGHEITSMOMENT

Betrachtet man den Drall und die Geschwindigkeit in ihrer skalaren Form gilt gemäss der Satzes vom Momentanzentrum $v = \omega r$. Die vereinfacht die (skalare) Drallberechnung auf:

$$L_0 = I_0\omega, \qquad \dot{L}_0 = I_0\dot{\omega}$$

mit dem **Massenträgheitsmoment** I_0:

$$I_0 = \iint_B r^2\, dm$$

Da das Massenträgheitsmoment bei ebenen Starrkörperbewegungen konstant ist kann man den Drallsatz auf die skalare Form reduzieren:

$$\dot{L}_0 = I_0\dot{\omega} = I_C\ddot{\varphi} = M_0$$

Bezüglich des Massenmittelpunktes C:

$$\dot{L}_C = I_C\dot{\omega} = I_C\ddot{\varphi} = M_C$$

Dies findet Anwendung beim Aufstellen von DGLs, welche den zeitlichen Verlauf des Winkels ϕ beschreiben.

Einige Trägheitsmomente:

Massenpunkt, Ring: $I_0 = mr^2$

Stab (bzgl. Endpunkt): $I_0 = \frac{1}{3}ml^2$

Stab (bzgl. Mittelpunkt): $I_0 = \frac{1}{12}ml^2$

Kreisscheibe (bzgl. Mittelpunkt): $I_0 = \frac{1}{2} m R^2$

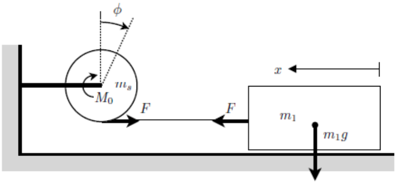
Kugel (voll): $I_C = \frac{2}{5} m r^2$

Kugel (leer): $I_C = \frac{2}{3} m r^2$

KINEMATISCHE RELATIONEN

Beim Aufstellen und Lösen von Bewegungs-DGLs ist es unerlässlich, dass man die beschreibenden Grössen in Beziehung zueinander setzt. Diese Zusammenhänge werden **kinematisch Relationen** genannt.

Masseloses Seil, massebehaftete Rolle



Das Seil wird auf die Rolle aufgerollt. Die Änderung von ϕ kann man über den Drallsatz beschreiben (DGL aufstellen). Man kann über die Kraft F x und ϕ verknüpfen. Dabei entspricht x genau der aufgerollten Strecke Seil. Folglich gilt $x = r\phi \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\phi}$. Moment des Rades: $M_P = rF - M_0$.

ENERGIESATZ

Energie verschiedener Zustände:

Ebene Rotation um O und Transl.: $E_{kin} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Feder: $E_{pot} = \frac{1}{2} k \dot{x}^2$

Normale Lageenergie: $E_{pot} = mgh$

Dies kann man zum Aufstellen von DGLs bei konservativen Systemen verwenden. Da sich die Energie nicht ändert, gilt:

$$\frac{d}{dt} E_{ges} = 0, \frac{d}{dt} \dot{x}^2 = 2\dot{x}\ddot{x}$$

Man erhält eine homogene DGL 2. Ordnung. $\dot{x}$ lässt sich meist kürzen, bzw. ausklammern.

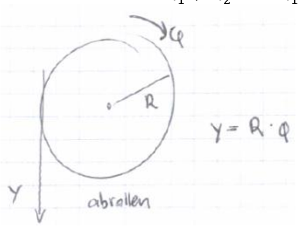
STOSS (IMPULSERHALTUNG)

vollkommen elastisch ($v_1' = v_2' = v$), $v = m_1 v_1 + \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

elastischer Stoss:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

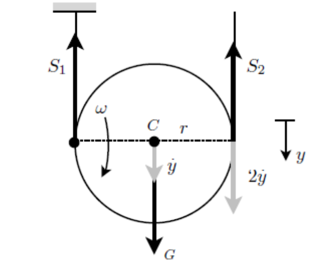


SONSTIGES

1. Berechnung von Stabkräften:

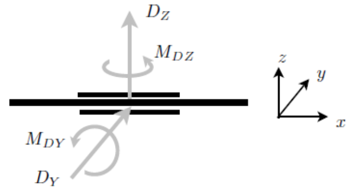
Zugkraft: $S > 0$, **Druckkraft**: $S < 0$

2. Rolle im Seil:



3. Langes Querlager in 3D:

Unzulässige Bewegungen



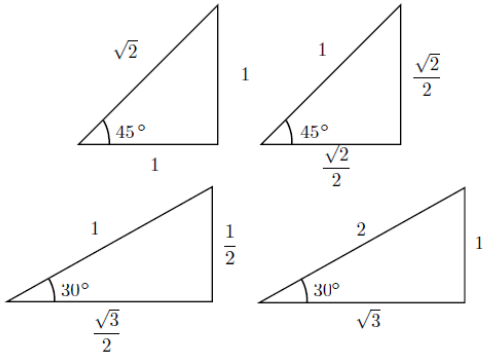
Zulässige Bewegungen sind die Rotation um den Stab (M_{DX}) und eine Translation in x-Richtung. Für das Moment eines Punktes O bezüglich D gilt dann in den GGB:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OD} \times \begin{pmatrix} 0 \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M_{DY} \\ M_{DZ} \end{pmatrix}$$

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

α	$0, 0°$	$\frac{\pi}{6}, 30°$	$\frac{\pi}{4}, 45°$	$\frac{\pi}{3}, 60°$	$\frac{\pi}{2}, 90°$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	undef.

ϕ	Hypothenuse	Gegenkathete	Ankathete
45°	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sqrt{2}$	1	1
30°	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2	$\sqrt{3}$	1



SKALARPRODUKT

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi), \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

?????? Projektion?

VEKTORPRODUKT

???

WIRKUNGSLINIE

$\vec{R}$ bestimmen, $\overrightarrow{M_X}$ in einem Punkt bestimmen

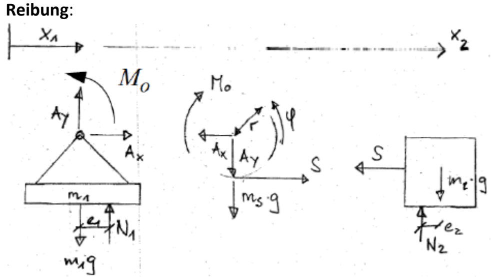
$\Rightarrow$ Richtung $\vec{R}$, Abstand $r = \frac{|\overrightarrow{M_X}|}{|\vec{R}|}$

LÖSUNGSANSÄTZE FÜR DGL

DGL	Funktion, Ansatz
$\ddot{x} = k$	$x(t) = \frac{k}{2} t^2 + c_1 t + c_2$
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$	$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$
$\ddot{x} + \omega^2 x = k$	$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{k}{\omega^2}$
$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$	$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}$

LÖSUNGEN EINIGER PROBLEME

2 Massen und 1 Rolle verbunden mit einem Faden ohne Reibung:



Gleichungssystem lösen:

1: $m_1 \ddot{x}_1 = A_x$

2: $M_S \ddot{x}_1 = S - A_x$

3: $I_C \ddot{\varphi} = S\, r - M_O$

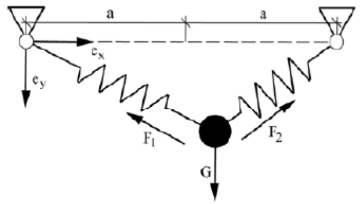
4: $m_2 \ddot{x}_2 = -S$

5: $\varphi r = x_2 - x_1$

1./5.: $(m_1 + m_S)\ddot{x}_1 = S$

3./5.: $S = \frac{m_S}{2}(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + \frac{M_0}{r}$

Freihängende Masse auf 2 Federn:



Newtonsches Bewegungsgesetz: $-2cx + 2ac = m\ddot{x}$

$-2cy + mg = m\ddot{y}$

Kreisfrequenz eines Pendels: $= \sqrt{\frac{g}{l}}$

Für kleine φ: $\sin(\varphi) \approx \varphi \approx \tan(\varphi)$

Konservativ: Keine Verlustleistung.

Haftreibung verursachte keine Verlustleistung!

SKIZZE ZEICHNEN bringt Punkte!!!!!!