PHYSIK I

Zusammenfassung zur Vorlesung von
Prof. Dr. D. Pescia

Lukas Cavigelli, Juli 2010
lukasc@ee.ethz.ch

MECHANIK TEIL 1

BEWEGUNGSGLEICHUNG/KRAFTFELDER

Newton'sche Bewegungsleichung:

$$m\,\ddot{\vec{x}}(t) = m\,\vec{a} = \vec{K}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t), \qquad [K] = \frac{kg\,m}{s^2} = N$$

NICHT BESCHLEUNIGTE BEWEGUNG

$$m\,\ddot{\vec{x}} = 0$$

Lösung der DGL:

$$\vec{x}(t) = \vec{v_0}(t - t_0) + \vec{x_0}$$

GLEICHMÄSSIG BESCHLEUNIGTE BEWEGUNG

$$m\,\ddot{\vec{x}} = \vec{K}$$

Lösung der DGL:

$$\vec{x}(t) = \frac{\vec{K}}{2m}(t - t_0)^2 + \vec{v_0}(t - t_0) + x_0$$

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_0^2 + 2\frac{K}{m}(x - x_0)$$

GLEICHFÖRMIGE KREISBEWEGUNG

Zentripetalbeschleunigung:

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^2}{r} = \omega^2 r = \dot{\varphi}^2 r$$

Periode: $T = \frac{2\pi r}{v}$

REIBUNG

Haftreibung: $|F_{R,h}| \le \mu_{R,h}|F_N|$
Gleitreibung: $|F_{R,g}| = \mu_{R,g}|F_N|$
Rollreibung: $|F_{R,g}| = \mu_{R,r}|F_N|$

ENERGIEERHALTUNG

$$U_{mech} = U_{kin} + U_{pot} = konst., \qquad U_{rot} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}$$

$$U_{pot} = mgh, \qquad U_{transl} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \qquad U_{kin} = U_{transl} + U_{rot}$$

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s}, \qquad F_x = -\frac{dU_{pot}}{dx}$$

Reibungswärme: $\Delta U_W = -\Delta s F_R$
Hebelgesetz: $m_1 l_1 = m_2 l_2$
Fluchtgeschwindkeit: $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

MASSENMITTELPUNKT

$$\vec{r_s} = \frac{1}{m_{ges}}\sum_k m_k \vec{r_k}, \qquad \vec{\tau} = \vec{r_s} \times \vec{F}_{ges}$$

IMPULS

$$p = m\dot{x}, \qquad konst., wenn\ F_{ext} = 0$$

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad Kraftstoss = \Delta p = p_E - p_A$$

STOSS

Elastizitätszahl: $e = -\frac{v_{2,E} - v_{1,E}}{v_{2,A} - v_{1,A}}$
Elastischer Stoss: Impuls- und Energieerhaltung gelten
Inelastischer Stoss: Impuls- und Energieerhaltung gelten nicht

ELASTISCHER STOSS

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1,i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2,i}$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2,i}$$

SPEZIELLE KRAFTFELDER

Gravitation:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad G = 6.67E - 11\frac{Nm^2}{kg^2}$$

Potentielle Gravtiationsenergie (R: Dist. v. m zu M):

$$U_R = -\frac{GMm}{R}, \qquad \Phi_g = -\frac{Gm}{|\vec{x}|}$$

Federkraft: $\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$, $E_{pot,Feder} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$

ROTATION

$$v_{tan} = r\dot{\varphi}, \qquad a_{tan} = r\ddot{\varphi}, \qquad \omega = \dot{\varphi}, \qquad \alpha = \dot{\omega}$$

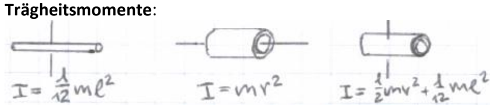
Trägheitsmoment $[kg\,m^2]$:

$$I = \sum_k m_k r_k^2$$

Steiner'scher Satz:

$$I = I_s + mh^2$$

I_s: Trägheitsmoment, wenn Achse durch Schwerpunkt
h: Distanz zur Achse durch Schwerpunkt
Trägheitsmomente:



Drehmoment $[Nm]$:

$$\vec{\tau} \equiv \vec{D} \equiv \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \dot{\vec{L}}, \qquad \tau_{ges} = I\ddot{\varphi}$$

Arbeit & Energie:

$$W := \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \tau\, d\varphi = \tau\varphi, \qquad U_{rot} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}, \qquad I \equiv \Theta$$

Leistung:

$$P = \tau\omega = \tau\dot{\varphi}$$

Drehimpuls:

$$L = I\dot{\varphi}, \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \qquad \vec{\tau}_{ext} = d\vec{L}/dt$$

$$\vec{L}' = \vec{L} + \vec{a} \times \vec{p}, \qquad \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}, \qquad [L] = \frac{m^2 kg}{s}$$

KEPPLER'SCHE GESETZE

1. Planete bewegen sich auf elliptischen Bahnen mit der Sonne im Brennpunkt. $A = \frac{r \cdot r\Delta\varphi}{2}$
2. $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ (Drehimpulserhaltung)
3. $T^2 \sim a^2$ (a. gr. Halbachse), für Kreis: $T^2 = \frac{4\pi^2}{aM}r^3$ Umlaufzeit, M: Masse im Mittelpunkt

Kinetische Energie Satellit: $K = -\frac{U}{2}$, $U: pot. E.$

SCHWINGUNGEN, HARMONISCH [KURZ]

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

Geschwindigkeit: $v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \delta)$

Federschwinger: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Frequenz einer harm. Schwingung unabh. von der Amplitude!
Energien:

$$U_{pot} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta)$$

$$U_{kin} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta)$$

$$U_{mech} = U_{pot} + U_{kin} = \frac{1}{2}kA^2$$

Pendel:

mathematisches Pendel: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

physikalisches Pendel:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$, I:Träg. mom., d:Dist. z. Achse

Gedämpfte Schwingung:

Zeitkonst. τ: $A^2 = A_0^2 e^{-t/\tau}$, $\quad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}\ (DGL)$

Amplitude: $A = A_0 e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}$, $\quad b = \frac{m}{\tau}$

Frequenz: $\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, $\quad Q = \omega_0\tau$

OSZILLATOREN

FREIER, HARMONISCHER OSZILLATOR

Potentielle Energie:

$$U_{pot}(\vec{x}) = -\int \vec{F}(\vec{x})\cdot d\vec{x}, \qquad [U] = Nm = J$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\mathrm{grad}\ U_{pot}(\vec{x})$$

Potential (Energie pro Einheitsmasse):

$$E_{pot} = mV$$

Allgemeine Bewegungsgleichung:

$$m\,\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}) = -\frac{dU_{pot}(\vec{x})}{d\vec{x}}$$

Arbeit (einer Kraft F von $x_1 \to x_2$, Linienintegral):

$$A(\vec{x_1} \to \vec{x_2}) = \int_{\vec{x_1}}^{\vec{x_2}} \vec{F}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

Zusammenhang zu U_{pot} und E_{kin}:
$A(x_1 \to x_2) = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}U\,dx = -\big(U(x_2) - U(x_1)\big) = \Delta U =$
$\int m\ddot{x} = \frac{m}{2}\dot{x} = \frac{dE_{kin}}{dx}$
Die Kraft leistet Arbeit, um E_{kin} zu verändern.
Totale Energie (eine Invariante der Bewegung):

$$E_{tot} = E_{kin} + U_{pot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ku^2 = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2$$

Harmonische Approximation der potentiellen Energie:
harmonische Approximation: Taylor-Entwicklung bis Grad 2.

$$U(x) = (x - x_0)U'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}U''(x_0)$$

Gültig für kleine Schwingungen in der Nähe des Minimums.
BGL mit harm. Approx: mit $y = x - x_0$ = Abw. von Gleichgew.

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = -(x - x_0)U''(x_0) \Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Lösung der DGL:

$$y(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- $y = x - x_0$; y: Abw. von Ruhelage, x_0: Ruhelage
- $U''(x_0) = k$: Federkonstante
- $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; ω_0: Eigen(kreis)frequenz (Freq. ohne Dämpfung)
- $\omega_0 \sim \sqrt{U''(x_0)}$ (Grundlage der Spektroskopie)
- A: maximale Amplitude
- φ: Phasenwinkel
- $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$: Eigenfrequenz
- $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}$: Schwingungsdauer (periode, unabh. von A!)

ERZWUNGENE SCHWINGUNG

In Anwesenheit eines äusseren Feldes besitzt das Sysztem zusätzlich zur eigenen pot. Energie auch die pot. Energie $U(x,t)$ durch das äussere Feld.

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x = x_0} = \frac{1}{m}F(t)$$

SPEZIALFALL $F(t) = f\ \mathrm{COS}(\gamma t)$

Lösung der inhomogenen DGL (gilt nicht für Resonanz):

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \left|\frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}\right|\cos(\gamma t), \qquad \gamma < \omega_0$$

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \left|\frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}\right|\cos(\gamma t - \pi), \qquad \gamma < \omega_0$$

A und φ folgen aus den Anfangsbed. Zusammensetzung aus einer Schwingung mit der Eigenfrequenz ω_0 des Systems und der Schwingung mit der Frequenz γ der äusseren Kraft.
Lösung der DGL bei Resonanz (wie oben, mit $\gamma \to \omega_0$):

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f}{2m\omega_0}t\sin(\omega_0 t)$$

Von der äusseren Kraft zugeführte Energie:

$$A^{\swarrow} = \int_{y(0)}^{y(t)} F^{\swarrow}dx = \int_0^{\tau} F^{\swarrow}(t)\frac{dy}{dt}\,dt$$

Fall $\gamma \ne \omega_0$:	Fall $\gamma = \omega_0$:
$A^{\swarrow} = 0$	$A^{\swarrow} = \frac{f^2}{8m}\tau^2$ (ohne Dämpfung)

Nur bei Resonanz kann das System Energie absorbieren.

GEDÄMPFTE SCHWINGUNG

Reibungskraft:

$$f_D = -D\dot{x}, \qquad D > 0$$

SPEZIALFALL: KEINE ANREGENDE KRAFT $F = 0$

$$\boxed{\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = 0}$$

Wobei die Dämpfungskonstante: $2\lambda = \frac{D}{m}$
Lösung der DGL: $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
für $\lambda < |\omega_0|$(schwache Dämpfung):
$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{|\lambda^2 - \omega_0^2|}$
$\Rightarrow y(t) = Ae^{-\lambda t}\cos\left(t\sqrt{|\lambda^2 - \omega_0^2|} + \varphi\right)$
Harmonische Schwingung mit exponentionell abnehmender Amplitude. Die Schwingungsfrequenz ist kleiner als die Frequenz der freien Schwingung ohne Reibung.
für $\lambda = |\omega_0|$ (aperiodischer Grenzfall):
$r_1 = r_2 = -\omega_0$
$\Rightarrow y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega_0 t}$
für $\lambda > |\omega_0|$ (starke Dämpfung):
$r_{1,2}$ reell, negativ
$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{-\left(\lambda - \sqrt{|\lambda^2 - \omega_0^2|}\right)t} + c_2 e^{-\left(\lambda + \sqrt{|\lambda^2 - \omega_0^2|}\right)t}$
Aperiodische Bewegung. Asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage (bei $t \to \infty$) ohne Schwingung.

SPEZIALFALL: $F = f\cos(\gamma t)$

$$\boxed{\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 = \frac{f}{m}\cos(\gamma t)}$$

Lösung der DGL: $y(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_D t + \varphi) + b\cos(\gamma t + \delta)$
wobei $b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}$ und $\tan(\delta) = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}$
Für $t \to \infty$ bleibt nur noch der zweite Summand (der erzwungene Term). Dämpfung ermöglicht Arbeitsübertragung zwischen äusserer Kraft und System auch neben der Resonanzfrequenz. Bremsung der Amplitude im Resonanzfall auf statischen Wert.
Keine sprunghafte Änderung der Phase um π bei $\omega_0 = \gamma$, sondern in einem engen Frequenzbereich der Breite 2λ um ω_0.
Q-Faktor:
$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$, Mass für die Schärfe der Resonanzkurve.
Absorbierte Energie pro Periode:
$A^{\swarrow}_{\lambda\neq 0} = \frac{f}{2} b\gamma\tau|\sin(\delta)| > 0$
Absorbierte Leistung:
$L^{\swarrow} = \frac{A^{\swarrow}}{\tau} = \frac{f}{2}\gamma b|\sin(\delta)|$
Lorentzfunktion:
Im eingeschwungenen Zustand bleibt E_{tot} einer erzwungenen Schwingung unverändert.
Maximale Leistungsaufnahme bei Resonanzfrequenz.
Charakterisierung der Steilheit um $\omega_0 = \gamma$ mit Q-Faktor.

RESONANZPHÄNOMENE

ELEKTRISCHER SCHWINGKREIS

BILD RLC-Serienschaltung

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q}\frac{1}{LC}q - \frac{1}{L}V_0\cos(\omega_0 t) = 0$$

Charakteristika	Mech. System	Elektr. System
Unabh. Var.	t	t
Abh. Var.	x	q
Trägheit	m	L
Dämpfung	2λ	$\frac{R}{L}$
Eigenfreq.	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
Periode	$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$\tau = 2\pi\sqrt{LC}$
Q-Faktor	$\frac{\omega_0}{2\lambda}$	$\frac{\omega_0 L}{R}$

SPEKTROSKOPIE

Transmissionsspektrum:
E_{min}: Transmissionsminimum, max. absorbierte Energie
$\omega_0 = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$; E_x: Energieniveaus
$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \cdot 10^{-34} kg\frac{m^2}{s}$
$\Delta E = \frac{\hbar}{T}$: Breite der Resonanzkurve

WELLEN [KURZ]

(Saite): $v = \sqrt{\frac{|F_s|}{\mu}}$, $F_s = \frac{ML}{T^2}$:Spannkraft, μ:lin. Massendichte
Harm. Wellenfld: $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$
Wellenlänge: $\lambda = c/f$
Ausbreitungsgeschw. einer Welle: $v = c = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$
Wellenzahl: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Transv. Geschw.: $v = -\omega A\cos(kx - \omega t)$
Transv. Beschl.: $a = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t) = -\omega^2 y$
$E_{pot} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta)$, $E_{kin} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta)$
δ: Phasendifferenz, $E_{mech} = \frac{1}{2}kA^2$
Diff. der kin. Energie: $\Delta E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\,\Delta x$
Leistung: $P = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$, $P = const.\cdot\frac{A^2}{v}$

INTERFERENZ

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

$\phi = k\Delta x$: Phasendiff. (y_1, y_2), Δx: Gangunterschied

RESONANZ (STEHENDE WELLE)

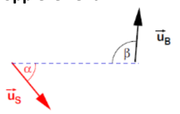
$$f = \frac{n}{2L}c, \qquad n\text{:Knotenanzahl}$$

(eine Seite offen, eine geschlossen)

SCHALLWELLEN

Druckänderung: $\Delta p_m = vg\omega \cdot \underbrace{S_m}_{Ampl.Luftelement}$
Phasenverschiebung: $\phi = \frac{\Delta L}{\lambda}2\pi$
Intensität: $I = \frac{1}{2}\varrho v\omega^2 S_m^2 = \frac{P_s}{4\pi r^2}$, P_s: Quellenleistung
Schallpegel: $B = 10\,dB\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$

Überschallflug: $\sin(\alpha) = \frac{v_{welle}}{v_{quelle}}$
Dopplereffekt:



$$f_{beob} = f_{sender}\frac{c + v_{beob}\cos(\beta)}{c - v_{sender}\cos(\alpha)}$$

ALLGEMEINE LÖSUNG 1D-PROBLEME

$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$
$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$, $\quad t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + konst.$
Nur reelle Lösungen, wenn $E > U(x)$
BILD
Bei Wendepunkten gilt: $E_{tot} = U(x)$ mit $E_{kin} = v = 0$
Periodendauer $T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$
Schwingung: $\omega = \frac{2\pi}{T}$
Harmonische Näherung:
$U(x) = U(x_0) + (x - x_0)^2\frac{U''(x_0)}{2}$
$T(E) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}$, $\quad \omega = \sqrt{\frac{U''}{m}}$
ω gibt Auskunft über 2. Abl. von E_{pot} in der Nähe von x_0.

MECHANIK UNSORTED

WELLENGLEICHUNG

Stehende Welle: $u(x,t) = A[\cos(\omega t - qx) - \cos(\omega t + qx)] = 2A\sin(qx)\sin(\omega t)$

HARMONISCHER OSZILLATOR

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = -kx$$

MECHANIK IM EUKLIDISCHEN RAUM

Symmetrien blabla
BGL: $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{K}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$
$\vec{K}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(|\vec{r}|) = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ bei Kugelsymmetrie (unsicher)
Gravitationskraft: $|F_G(\vec{r})| = \frac{GMm}{|\vec{r}|^2}$
Gravitationspotential: $\Phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{|\vec{r}|}$

$$U(h) = mgh$$

TRÄGHEITSKRAFT

$$\vec{F} = -m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}$$

ZENTRIPETALKRAFT

$$F_z = mr\omega^2 = mr\dot{\varphi}^2 = \frac{mv^2}{r}, \vec{F_z} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}), \qquad a_z = \omega^2 r$$

CORIOLISKRAFT

$$\vec{F_C} = 2m(\vec{v}\times\vec{\omega})$$

SYMMETRIEN & ERHALTUNGSSÄTZE

Freiheitsgrad: $f \to 2f - 1$ Erhaltungssätze, $2f$ Gleichungen

IMPULSERHALTUNG

$$\vec{p} = \sum_i m_i\dot{\vec{r}_i}, \qquad \frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_i m_i\ddot{\vec{r}_i} = \sum_i \vec{F_i} = 0$$

$$\dot{\vec{X}} = \frac{\vec{p}}{\sum_i m_i} = \text{const}$$

Anwendungen:

- Raketengleichung

$\frac{dv_{Rackete}}{dt} = \frac{v_{Ausstoss}\frac{dm}{dt}}{m_0 - \frac{dm}{dt}t}$, $v_{Rackete}(t) = v_{Ausstoss}\ln\left(\frac{m_0}{m_t}\right)$

DREHIMPULSERHALTUNG

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r_i}\times m_i\dot{\vec{r_i}} = mr^2\dot{\varphi} = mr^2\omega$$

STARRKÖRPERBEWEGUNGEN

Drehmoment: $\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r_i}\times\vec{K_i} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{r_i}\times m_i\dot{\vec{r_i}}$
Trägheitsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int_V r^2\rho(\vec{r})dV$, r_i: Abstand von der Drehachse

BEWEGUNGSGLEICHUNG, FESTE DREHACHSE

ANDERE

TRÄGHEITSMOMENT

um z: $\Theta_z = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$, $\Theta_z = \int_V \underbrace{(x_i^2 + y_i^2)}_{\vec{r}\cdot\vec{r}}\cdot\rho(\vec{r})\,dV$

Lichtfrequenz: $\gamma = \frac{E_{rot}}{\hbar} = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\Theta}$

ÜBERSICHT

Translation	Rotation
x	φ
v	$\dot{\varphi} = \omega$
$\dot{v}$	$\ddot{\varphi} = \dot{\omega}$
m	$\Theta \equiv I$
$p = m \cdot v$	$L = \Theta \cdot \omega$
$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$

1D-SCHWINGUNG MEHRERER FG

1D-Schwingungen mehrerer Freiheitsgrade

EIGENMODEN ZWEIER GEKOPPELTEN HARMONISCHE OSZILLATOREN

Eigenmode:

Lineare Superposition von Fundamentallsg. der BGL.

Schwingungstyp, bei der das System mit nur einer Frequenz schwingt.

BILD

$$m\ddot{y}_1 = -ky_1 - k(y_1 - y_2) \quad (I), \qquad y_1 = x_1 - a$$
$$m\ddot{y}_2 = -ky_2 - k(y_2 - y_1) \quad (II), \qquad y_2 = x_2 - 2a$$

Bestimmung der Eigenfrequenzen ω_n – Möglichkeit 1:

(I)-(II):$m(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) = -k(y_1 - y_2) - k\big((y_1 - y_2) - (y_2 - y_1)\big)$

Substitution $v = y_1 - y_2$: $m\ddot{v} = -3kv \Leftrightarrow \ddot{v} + 3kv = 0$

$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

(I)+(II):$m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) = -k(y_1 + y_2) - k\big((y_1 - y_2) + (y_2 - y_1)\big)$

Subsitution $v = y_1 + y_2$: $m\ddot{v} = -kv \Leftrightarrow \ddot{v} + kv = 0, \omega_\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Bestimmung der Eigenfrequenzen ω_n – Möglichkeit 2:

Ansatz: $y_i = a_i e^{i\omega t}$, zu bestimmen: ω

$$-m\omega^2 a_1 e^{i\omega t} = -ka_1 e^{i\omega t} - ke^{i\omega t}(a_1 - a_2)$$
$$-m\omega^2 a_2 e^{i\omega t} = -ka_2 e^{i\omega t} - ke^{i\omega t}(a_2 - a_1)$$
$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$chp \to det = 0$: $(2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$

$\omega_\alpha^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_\beta^2 = \frac{3k}{m}$

$$\underbrace{y_\alpha(t) = e^{i\omega_\alpha t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{im Takt}}, \qquad \underbrace{y_\beta(t) = e^{i\omega_\beta t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{im Gegentakt}}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\alpha e^{i\omega_\alpha t} + c_\beta e^{i\omega_\beta t} \\ c_\alpha e^{i\omega_\alpha t} - c_\beta e^{i\omega_\beta t} \end{pmatrix} = c_\alpha y_\alpha + c_\beta y_\beta$$

EIGEINMODEN EINE SCHWINGENDE KETTE MIT N GEKOPPELTEN OSZILLATOREN

BILD

Kette mit N Atomen

n-te Masse:

$y_n = x_n - na$; x_n: Ruhelage, a: Gitterkonstante

$$m\ddot{y}_n = -k(y_n - y_{n-1}) - k(y_n - y_{n+1})$$
$$= k(u_{n-1} + u_{n+1}) - 2ku_n$$

Periodische (Born-von-Karman) Randbedingungen:

Verbinden des ersten und letzten Atoms (Kreis) $\to y_n = y_{n+N}$

Ansatz: $y_n = a_n e^{i\omega t}$

Wir setzen: $|a_n| = 1 \to a_n = e^{iqna}$ (Einheitskreis)

mit q: zu best. Parameter; na: ursprünglicher Gitterpt., Ref.

chp: $-m\omega^2 = k\left(e^{-iqa} + e^{iqa} - 2\right) = 2k(\cos(qa) - 1)$

$\to \omega(q) = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{qa}{2}\right)$

Jedes q trägt eine bestimmte Eigenfreqenz

q klassifiziert Schwingungszustände

$$RB \to e^{iq(n+N)a} = e^{iqna} \to e^{iqNa} = 1 \to qNa = p2\pi,$$
$$p = 0,1,2,\dots,N-1$$

Die Kopplung bewirkt, dass sich die Frequenz $\sqrt{\frac{k}{m}}$ des ungekoppelten Oszillators zu einem Frequenzband verbreitert.

Dispersionsrelation: q-Abhängigkeit von ω.

ÜBERGANG ZUM SCHWINGENDEN KONTINUUM, WELLENGLEICHUNG

Auslenkung benachbarter Atome nur infinitesimal unterschiedl.

na wird als kontin. Variable x betrachtet. $y_n' = \frac{\partial}{\partial x}y_n(x,t)$

$m\ddot{y}_n = k(y_{n-1} + y_{n+1}) - 2ky_n$

$y_{n-1} \approx y_n - ay_n' + \frac{a^2}{2}y_n'' + \cdots$

$y_{n+1} = y_n + ay_n' + \frac{a^2}{2}y_n'' + \cdots$

$\to m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx ka^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{\underbrace{m}_{c^2}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- y: Auslenkung
- x: Ort
- t: Zeit
- c: Fortpflanzungsgeschw. (Materialkonstante)

Allgemeine Lösung (Satz von d'Alembert):

$$y(x,t) = \underbrace{f(x - ct)}_{\rightarrow} + \underbrace{g(x + ct)}_{\leftarrow}$$

BILD

- Phononen: $c = \sqrt{\frac{ka}{\rho}}$

  $\rho = \frac{m}{a}$, Masse pro Längeneinheit

  ka: mittlere rücktreibende Kraft
- Erdbebenwellen: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
- Lichtwellen: c = Lichtgeschwindigkeit

HARMONISCHE WELLE

$$f(x,t) = A\cos(qx - \omega t), \qquad \omega = cq$$

q: Wellenzahl = Wellentäler pro Längeneinheit

$\lambda = \frac{2\pi}{q}$: Wellenlänge

BILD

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \lambda = cT$$

STEHENDE WELLE

Gesamtwelle = einfallende Welle + reflektierende Welle

$$f(x,t) = A\cos(qx - \omega t) + B\cos(qx + \omega t)$$

Randbedingung: fester Punkt $f(x = 0, t) = 0, \forall t$

Überlagerte Welle, fix bei x=0:

$$f(x,t) = 2A\sin(qx)\sin(\omega t)$$

BILD

Bedingung für stehende Welle: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=L} = 0\ \forall t$

$\sin(qx_n) = 0 \Longrightarrow$ Knoten: $x_n = \frac{n\lambda}{2}$, $n = 0,1,2,\dots$

EIGENFREQ. EINES SCHWINGENDE SEILS

(auf beiden Seiten festgehalten)

Zusätzliche RB: $\sin(qL) = 0 \to q = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}$

Eigenfrequenzen: $\omega_n = cq = \frac{c\pi}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)$

MECHANIK TEIL 2

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) = -grad\ U(\vec{r}), \qquad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

BEWEGUNG EINES MASSENPUNKTES IM ZENTRALFELD

Kraft $K(r) = -grad\ U(|r|) = \frac{dU(|r|)}{d|r|}$, $grad\ |r| = \frac{r}{|r|}e_r$

Kugelsymmetrische Funktion wie das Gravitationsfeld der Sonne oder das Coulombfeld eines Protons.

Impuls:

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$$

Massepunkt führt Drehbewegung aus, falls $\vec{p}$ eine Komponente senkrecht zu $\vec{r}$ besitzt.

$$\to \vec{r} \times \vec{p} \neq 0 = \vec{L}$$

Das Zentralfeld wirkt nur entlang des Radius.

$\to \vec{L} = konst.$, Drehimpulserhaltung

Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{r}$$

$\vec{L}$ zeigt in feste Raumrichtung, senkrecht zu $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$.

Erhaltung des Drehimpulses:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = \frac{d}{dt}\vec{L} = 0$$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = mr \times \dot{\vec{r}}$, $\quad 2D: m\vec{r}\vec{v} = (mr^2)\omega = \frac{mr^2 2\pi}{T}$

2. Keppler'sches Gesetz:

„Der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Fläche"

Bewegung im Zentralfeld num im 2D (d.h. Teilchenbahn liegt in eines Ebene), da L = konst.

BILD

BGL FÜR EINE MASSE IM ZENTRALFELD

Zentrifugalkraft:

$$\text{Zentrifugalkraft} = m\rho\omega^2 = \frac{L^2}{m\rho^3}$$

Corioliskraft:

$$\text{Corioliskraft} = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$$

Gravitationskraft:

$$F(\rho) = -\frac{GMm}{\rho^2}, \qquad U(\rho) = -\frac{GMm}{\rho}$$

$$m\ddot{\rho} - \overbrace{m\rho\dot{\varphi}^2}^{\text{Zentrifugalkraft}} = f(\rho)$$
$$\underbrace{2m\dot{\rho}\dot{\varphi}}_{\text{Corioliskraft}} + m\rho\ddot{\varphi} = 0$$

$$L = konst. = m\rho^2\dot{\varphi} \to \boxed{\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2}}$$

Radiale BGL:

$m\ddot{\rho} = F(\rho) + \frac{L^2}{m\rho^3}$ = effektive Kraft $= -grad\ U_{eff}(\rho)$

$U_{eff} = -\frac{GMm}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m\rho^2}$

BILD

Gesamtüberblick Trägheitskräfte: mir $\vec{r}$ Vektor zur Referenzpt.

$$\vec{F} = \underbrace{-m\vec{g}}_{\text{Beschleunigungs-kraft}} \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\text{Corioliskraft}} \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Zentrifugalkraft}} \underbrace{-m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\text{lineare Beschleunigungs-kraft}}$$

BEISPIEL: DREHIMPULS & ENERGIE

Ein Massept. ist an einer Schnur befestigt und rotiere um die z-Achse. Zieht man mit der Kraft F an der Schnurrt wird r kleiner.

1. Aufstellen der DGL:

$$m\ddot{r} = -F + F_{zf}(r) = -F + \frac{L^2}{mr^3}$$

$\varphi(t)$ via Definition des Drehimpulses: $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

Die Arbeit, die von der Kraft F geleistet wird, ist die überwundene Zentrifugalkraft integriert über die Änderung des Radius: $W = \int_{r_0}^{r_1} -\frac{L^2}{mr^3}dr = \left.\frac{L^2}{2mr^2}\right|_{r_0}^{r_1}$

Bestimme $\varphi(t)$. Es gilt: $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^{-1} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}$

Daraus eliminiere über den Drehimpuls: $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{L}{r^2 m\dot{r}}$

Diese DGL lässt sich nun elementar integrieren.

BEISPIEL: RAUMSCHIFFRENNEN

Wird ein Raumschiff auf einer stationären Bahn schneller, wenn es Gas gibt oder bremst?

Auf einer stat. Bahn liefert die Gravitation die Zentripetalkraft:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\dot{\varphi}^2 r = \frac{L^2}{mr^3} \Rightarrow r = \frac{L^2}{GMm^2}$$

Definition des Drehimpulses: $L = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow r = \frac{L}{mr^2}$

Ausdruck 1 in 2 einsetzen: $\dot{\varphi} = \frac{L}{m\left(\frac{L^2}{GMm^2}\right)^2} \propto \frac{1}{L^3}$

Damit nimmt $\dot{\varphi}$ zu, wenn L abnimmt.

KEPLER PROBLEM

$U(\rho) = -\frac{GMm}{\rho} = -\frac{\alpha}{\rho}$

Totale Energie: $E = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}$

$\to \dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left(\frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}\right)\right)}$, $\quad \dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2}$

DGL für Bahn: $\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}$

Bahngleichung: $\varphi(\rho) = \frac{\overbrace{L^2/\alpha m}^{p}}{1 + \cos(\varphi)\underbrace{\sqrt{\frac{2EL^2}{\alpha^2 m} + 1}}_{\epsilon}}$

$\rho = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\varphi)}$, Exzentrität ϵ

$\epsilon = 0$: Kreis, $0 < \epsilon < 1$: Ellipse, $\epsilon = 1$: Parabel, $\epsilon > 1$: Hyperb.

1. Kepler Problem:

„Planeten bewegen sich auf Ellipsen in deren Brennpunkt die Sonne steht."

ELEKTRIZITÄT

Coulombgesetz: $\vec{F}_{q_1\to q_2}(\vec{r_1},\vec{r_2}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\cdot q_2}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^2}\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|},\ [q]=C$

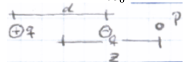
Elektrisches Feld: $\vec{E} = \vec{F}/Q\ ,\ W = U/d$

E-Feld einer Punktladung: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r^2}$

E-Feld eines ∞-langen Leiters: $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r_\perp}$, λ: Ladungsdichte

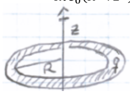
E-Feld radial Kugelschale: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$

E-Feld Dipol (für grosse d): $E = \frac{dq}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$



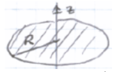
El. Dipolmoment: $p = qd$

E-Feld eines Leiterrings: $E_z = \frac{zq}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$



E-Feld einer runden Leiterplatte: $E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right),\ z>0$

Flächenladungsdichte: $\sigma = q/A$



Drehmoment eines Dipols im E-Feld: $\vec{L} = \vec{P}\times\vec{E}$

Pot. Energie eines Dipols: $U_{pot} = -\vec{P}\cdot\vec{E}$

Fluss eines E-Feldes: $\Phi_E = \oint_A \vec{E}d\vec{A},\ [\Phi_E] = \frac{N}{C}m^2$

Gauss'scher Satz: $Q_{in} = \varepsilon_0\Phi_E$

$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, ρ:Volumenladungsdichte

Feld aus Potential: $E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $\vec{E} = grad\ U$ nur Elektrostatik

Äusseres E-Feld eines geladenen Leiters:

$E_\perp \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{A\varepsilon_0}$ an der Oberfläche des Leiters

Äusseres E-Feld einer geladenen Ebene: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},\ x = 0^+$

Elektrische potentielle Energie: $U_{pot,el} = q\varphi$

Elektrisches Potential: $U_{A\to B} = \frac{U_{pot,el}}{Q} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}_{AB} = \varphi_B - \varphi_A$

Arbeit einer äusseren Kraft: $W_a = Q\cdot\Delta U$

Elektrisches Potential: $\varphi_A = -\int_\infty^A \vec{E}\cdot d\vec{s}$

Potentialdifferenz: $U_{A\infty} = \varphi(A) - \varphi(\infty)$

Potential einer Punktladung: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$

Potential eines elektr. Dipols: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ mit

Ladung q bei $\vec{d}$ und $-q$ bei 0

Potential: $U = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\log\left(L+\sqrt{L^2+d^2}\right) - \log(d)\right)$

Potential einer Kugelschale: $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},\ r\begin{cases}\text{in Kugel}: r_k, const.\\ \text{aussen}: r\end{cases}$

El. Energie von 2 Ladungen: $U_{pot,el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$

Potential eines Punktladungssystems: $U = \sum_k \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_k}{r_k}$

Potential einer ∞-langen Linienladung: $U = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\lambda\ln\left(\frac{r}{r_B}\right)$

Potential eines Ringes: $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}$

Potential eines Scheibe: $U = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right)$

UNSORTED

STROM

Stromdichte: $\vec{J},\ I = \int\vec{J}\cdot d\vec{A}$

Driftgeschwindigkeit: $\vec{v_D},\ \vec{J} = n\cdot e\cdot\vec{v_D}$, n: Anz. freie Ladungen

SPEZIELLE ELEKTRISCHE FELDER

- **geladene Kugel**:

$$\iint E(r)r^2 d\varphi\sin(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$Q = \iiint\rho\ dV = \rho\frac{4\pi}{3}R^3,\qquad E(r\geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\phi(r) - \phi(\infty) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- **Grenzflächen / Randbedingungen**:

$$\overrightarrow{E_{\perp R}} - \overrightarrow{E_{\perp L}} = ?\,???$$

Feld im Dielektrikum: $\vec{E} = \frac{1}{1+\chi}\vec{E_0} = \frac{1}{\kappa}\vec{E_0}$, $mit\ \vec{E_0}$ ohne Dielek.

PIEZOELEKTRIKA

=Festkörper mit permanentem Dipolmoment $\vec{p}$

$\Delta U \Leftrightarrow \Delta l$: Länge ändert sich je nach Feld.

$$(\text{grad } l)/l = \eta E$$

MAXWELL-GLEICHUNGEN

1. Maxwell-Gleichung (Gauss-Gesetz):

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \underbrace{\frac{div\ \vec{P}}{\varepsilon_0}}_{\text{Material}},\qquad \oiint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \Phi_E = \underbrace{\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} - \oiint_{\partial V}\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\cdot d\vec{S}}_{\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0\varepsilon_{rel}}\text{ bei lin. Mat.}}$$

2. Maxwell-Gleichung (Gauss-Magnetisierungs-Gesetz):

$$div\ \vec{B} = 0,\qquad \oiint_{\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

3. Maxwell-Gleichung (Faradays Induktionsgesetz):

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\qquad \oint_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi_{B,S}}{\partial t} = U_{induziert}$$

4. Maxwell-Gleichung (Ampères Gesetz):

$$rot\ \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\qquad \oint_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi_{E,S}}{\partial t}$$

$\vec{E}$: elektrisches Feld, $\vec{B}$: Magnetfeld

$\vec{D}$: elektrisches Verschiebungsfeld, elektrische Flussdichte

$\vec{H}$: Magnetisierungsfeld, magnetische Felddichte

$\vec{J}$: Stromdichte

$$\vec{J}_{total} = \vec{J}_{free} + \vec{J}_{mat},\qquad \vec{J}_{mat} = \vec{J}_{mag} + \vec{J}_{pol}$$

$$\vec{J}_{free} = \sigma\vec{E},\qquad \vec{J}_{mag} = rot\ \vec{M},\qquad \vec{J}_{pol} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

Φ_B: Fluss des B-Feldes durch Fläche

$\Phi_{E,S} = \iint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}$: Fluss des E-Feldes d. (für Gauss geschl.) Fl.

$\vec{M} = \vec{M}(\vec{B},\vec{E}) = \frac{1}{V}\sum_V\vec{\mu}_i$: Magnetisierung

$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E},\vec{M})$: Polarisierung

I_{in}: von Schleife umschlossener Strom

$\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$

Die differentielle Form heisst lokale Form, die andere globale.

MAXWELL FÜR LINEARE MATERIALIEN

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho_{free}}{\varepsilon_0\varepsilon_{rel}},\qquad div\ \vec{B} = 0$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\qquad rot\ \vec{B} = \mu_0\mu_{rel}\vec{J}_{free} + \varepsilon_0\varepsilon_{rel}\mu_0\mu_{rel}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

ELEKTRISCHES POTENTIAL

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = \int\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

ENERGIE & ENERGIEDICHTE

$$W_{el} = \frac{1}{2}CQ^2,\qquad W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

$$W_{elm} = \begin{cases}\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)\\ \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right)\end{cases}$$

Energiedichte: $w = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\vec{E}\right)^2$

Energie: $U_{pot} = W = \int_V w\ dV$

Selbstenergie eine Ladungsverteilung:

$$U_{pot,Feld} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\vec{E}^2 dV$$

MAGNETISCHES VEKTORPOTENTIAL

$$\vec{B} = rot\ \vec{A},\qquad \vec{E} = -(grad\ \varphi) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\qquad rot\ \vec{B} = div\ \vec{A}$$

Maxwellgleichungen als magn. Vektorpotential:

$$div\ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,\qquad \vec{A} = \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\right]\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$

ANDERE GRÖSSEN

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Elektrischer Fluss: $\Psi = \int_A\vec{D}\cdot d\vec{A}$

Elektrische Flussdichte: $\vec{D} \equiv \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}$

KOMPONENTEN

WIDERSTÄNDE

Ohm'sches Gesetz:

$$U = R\ I,\qquad U\ G = I,\qquad \vec{j} = \sigma\vec{E},\qquad \sigma\text{:spez. Leitwert}$$

KAPAZITÄTEN/KONDENSATOREN

Allgemein:

$$U\ C = Q,\qquad i_C = C\frac{du_C}{dt},\qquad U = \int_0^d E(x)\,dx$$

Q bzw. $-Q$ je Platte

Plattenkondensator: $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

Zylinderkondensator: $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{r_{aussen}}{r_{innen}}\right)}$ L:höhe des Zylinders

Kugelkondensator: $C = 4\pi\varepsilon_0\frac{r_{innen}r_{aussen}}{r_{aussen}-r_{innen}}$

Isolierte Kugel (Eigenkapazität): $C = 4\pi\varepsilon_0 r$

Energie: $W \coloneqq \int_0^Q U\ dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2$

Kondensator mit Dielektrikum: $C = C_0\varepsilon_{rel},\ E = \frac{E_0}{\varepsilon_{rel}}$

INDUKTIVITÄTEN

$$u_L = L\frac{di_L}{dt},\qquad \Phi_B = LI$$

MAGNETISMUS

Lorentzkraft: $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ (Rechte-Hand-Regel)

Kraft auf Leiter: $\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B}$

Magn. Moment: $\vec{\mu} = nI\vec{A},\ [\vec{\mu}] = Am^2$, n:Windungen

Drehmoment auf eine Leiterschleife: $\vec{M} = \vec{\mu}\times\vec{B}$, $\vec{A}$: Fläche

El. Energie eines magn. Dipols: $U_{el,pot} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

Magnetischer Fluss: $\Phi_B = \int\vec{B}\cdot d\vec{A}$ (pro Windung)

Induzierte Spannung (Faraday): $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (pro Windung)

Spulen/Magnetfelder:

Zylinderspule: $B = \frac{\mu_0 In}{l}$

Ringspule: $B = \frac{\mu_0 In}{2\pi r}$

Schleife: $B_z = \frac{\mu_0 Ir^2}{2(r^2+z^2)^{3/2}}$???

∞-langer Leiter: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Elektrische Energie eines Punktladungssystems:

$$U_{el,pot} = \frac{1}{2}\sum_k q_k r_k$$

Geschwindigkeitsfilter:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$
$$|\vec{v}| = |\vec{E}|/|\vec{B}|$$

Massenspektrometer:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU,\qquad r = mv/|q\vec{B}|$$

Induktionsspannung in einem senkrecht zu seiner Längsachse und zu B bewegten Stab:

$$U_{ind} = |\vec{v}||\vec{B}|l$$

Selbstinduktivität einer Zylinderspule: $L = \frac{\mu_0 n^2 A}{l}$

Gegeninduktion: $\Phi_{mag,2,1} = L_{2,1}I_1,\ \Phi_{mag,2} = \Phi_{2,2} + \Phi_{2,1}$

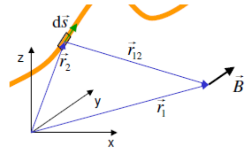
Lenz'sche Regel (alternative Version):

Ändert sich der magn. Fluss durch eine Fläche, so wird ein Strom induziert, der seinerseits ein Magnetfeld und damit einen magnetischen Fluss durch dieselbe Fläche hervorruft, der seiner Ursache entgegengerichtet ist.

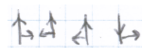
BIOT-SAVART

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{r}\times d\vec{s}}{r^3},\qquad \vec{s}\text{:Stromrichtung}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_{Draht}\frac{\vec{r}_{12}\times d\vec{s}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

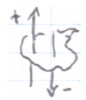


KRAFT ZWISCHEN 2 PARALLELEN STRÖMEN



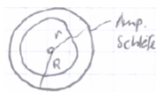
$$|\vec{F}_{ba}| = |I_b\vec{l}\times\vec{B}| = \left|\frac{\mu_0 I_a I_b l}{2\pi d}\right|$$

AMPÈRE'SCHES GESETZ



$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}$$
$$\Leftrightarrow rot\ \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + +\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

MAGNETFELD IN EINEM LEITER



$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

INDUZIERTE ELEKTRISCHE FELDER

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_{B.S}}{\partial t}$$

VEKTORPOTENTIAL

$$\vec{B} = rot\ \vec{A}, \qquad \vec{E} = -grad\ \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$
$$rot\ \vec{B} = div\ \vec{A} ???$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0, \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\varphi$$

haben dasselbe $\vec{B}$-Feld.
Diese Freiheit heisst Eichfreiheit.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = rot\ \vec{B} = \Delta \vec{A}$$
$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

ELEKTRISCHER STROM

Drude-Modell:

$m\dot{v} = m\ddot{x} = qE - \underbrace{\frac{m}{\tau} v}_{\text{"Reibung"}}$

Stationärer Fall: $qE = \frac{mv}{\tau} \Rightarrow v_{Drift} = \frac{\tau q E}{m}$

Homogener Fall: $v_{\text{hom}}(t) = Ae^{-t/\tau} \Rightarrow v(t) = v_{Drift}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$\Delta q = v_{drift}\, n\, q\, A\, \Delta t,\ \ n$: Ladungsträgerdichte

$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = v_{drift}\, n\, q\, A,\ \ j = \frac{I}{A} = v_{drift}\, n\, q,\ \ j = \underbrace{\frac{nq^2\tau}{m}}_{\sigma \text{ Leitfähigkeit}} \cdot E$

$U = RI,\ \ R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{\varrho l}{A}$

KONTINUITÄTSGLEICHUNG

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Gesamtstrom aus einem Volumen $I = \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{s}$

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

GESETZE DER MAGNETOSTATIK

1. GESETZ DER MAGNETOSTATIK

$$\vec{j} \times (\vec{\nabla}\psi) = -rot\ (\psi \vec{j}) + \psi (rot\ \vec{j})$$

1. Gesetz der Magnetostatik:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\text{rot} \int_{V'} \frac{\vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right) \Rightarrow div\ \vec{B} = 0$$

2. Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

3. Ampère:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}\, d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow \oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I$$

4. Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Right-Hand-Rule für positive Ladungen.

Vektoranalysis: $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

MAGNETISCHE FELDER EINFACHER STROMVERTEILUNGEN

FELD EINES STROMFADENS

Strom I entlang eines Weges C. Parametrisierung von C nach ser Bogenlänge S: $\vec{r} = \vec{r}(s)$. $\vec{t}$ jeweils der Tangentialvektor.

$$d\vec{r} = ds\, \vec{t}, \qquad d\vec{S} = df\, \vec{t}, \qquad dV = d\vec{S} \cdot d\vec{t} = df\, ds$$
$$\vec{j} dV = j\vec{t}\, df\, ds = I\vec{t}(s) ds$$
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C d\vec{r}' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

ELEKTRODYNAMIK

GESETZE DER ELEKTRODYNAMIK

Elektromotorische Kraft:

$$EMK = \mathcal{E} = \oint_C \vec{E}\, d\vec{l}$$

Magnetischer Fluss:

$$\mathcal{F} = \int_{S_C} \vec{B}\, d\vec{S} = \Phi_{B,S}, \qquad U_{ind} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$$

Faraday-Gesetz (auch Induktionsgesetz):

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \Phi_B = \iint_{A(t)} \vec{B}(\vec{r}, t)\, d\vec{A},$$
$$A(t): moving\ Surface$$

(Verallgemeinerung von Elektrostatik $rot\ \vec{E} = 0$)

Anderes komisches Gesetz:

$$rot\ \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (rot\ \vec{E})$$

Maxwell-Faraday-Gleichung:

$$rot\ \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \qquad \oint_{\partial A} \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B}\, d\vec{A}$$

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q\, \vec{E} + q\, \vec{v} \times \vec{B}$$

Lorentz-Kraft kompliziert:

$$\vec{F} = q\left(\overbrace{-(grad\ \phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}^{\vec{E}} + \vec{v} \times \overbrace{(rot\ \vec{A})}^{\vec{B}} \right)$$

Die magnetische Teil der Lorentzkraft leistet nie Arbeit!

$$\vec{E} = -(grad\ \phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = rot\ \vec{A}$$

Elektromagnetische Induktion:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \text{ in Spulen: } -N\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad \Phi_B\text{:magn. Flux}$$

Elektrisches Verschiebungsfeld:

$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_{rel} \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \qquad \varepsilon_{rel} = (1 + \chi_e), \qquad P: Polariz.$

für lineare Materialien: $\mu_0 \mu_{rel} \vec{H} = \vec{B}$

Elektrischer Verschiebungsstrom:

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \qquad I_D = \varepsilon \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$$

SPULE MIT EISENKERN

$$B = B_{Spule} + \mu_0 M, \qquad M: Magnetisierungskonst.$$

FELDVERHALTEN AN GRENZFLÄCHEN

$$B_\perp, E_\perp = stetig$$

ELEKTROMAGNETISCHE-WELLEN

Lösung der Maxwellgleichungen im Vakuum.

$$div\ \vec{E} = 0, \qquad div\ \vec{B} = 0$$
$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad rot\ \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Lösung suchen mit $\vec{E}, \vec{B} \neq 0$

$$rot(rot\ \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (rot\ \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$
$$rot(rot\ \vec{B}) = \underbrace{div(grad\ \vec{B})}_{0} - \Delta \vec{B}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2\, \Delta \vec{E}, \qquad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2\, \Delta \vec{B}}$$

Wellengleichung:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$
$$\vec{B} = \frac{1}{c_0} \hat{\vec{k}} \times \vec{E}$$

Brauchbare Wellengleichung:

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$
$$E(t, \vec{r}) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \phi_0$$
$$B(t, \vec{r}) = B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)$$
$$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

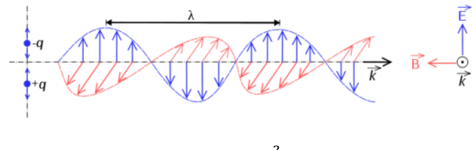
$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$

Ansatz zur Lösung

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}r - \omega t)}, \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}r - \omega' t)}$$

Einsetzen in WG:

$$\omega = \pm c|\vec{k}|, \qquad \omega' = \pm c|\vec{k}|$$
$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{B}_0, \qquad k\text{: Ausbreitungsrichtung}, \vec{k} \perp \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$$
$$|\vec{E}_0| = c|\vec{B}_0|, \qquad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$



$$\vec{\omega}^2 = \vec{k}^2 \frac{c^2}{n^2}$$

Resultat:

1. $\omega = \omega' = \omega''$
2. $\underbrace{\overrightarrow{k_\parallel} = \overrightarrow{k_\parallel}' = \overrightarrow{k_\parallel}'',\ \overrightarrow{k_\perp} = -\overrightarrow{k_\perp}'}_{\Theta_r = \Theta_i}$
3. $n_1 \sin(\Theta_i) = n_2 \sin(\Theta_r)$ (Snell-Gesetz)

BRECHUNG UND FELDER AN GRENZFLÄCHEN

$$\frac{\tan(\theta_1)}{\tan(\theta_2)} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}, \qquad \frac{\tan(\theta_1)}{\tan(\theta_2)} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$

Die Tangentialkomp. bleiben erhalten bei E, H, D, B-Feldern. u

REFLEXION & BRECHUNG

Alles für lineare Materialien: $\vec{M} = \rho_f = \vec{J}_f = 0,\ \chi > 0$

$$m\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = q\vec{E}, \qquad \vec{E} = \overrightarrow{E_0} \cos(\omega t), \qquad \omega < \omega_0$$
$$\vec{P} = pq\vec{r} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 \underbrace{\left(\frac{pq}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)}_{\chi} \vec{E}$$

$$div\ \vec{E} = 0, \qquad div\ \vec{B}, \qquad rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$rot\ \vec{B} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_0 \chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2}(1 + \chi) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\left(\frac{c}{\sqrt{1+\chi}} \right)^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$\sqrt{1 + \chi(\omega)} = n(\omega) = \text{Brechungsindex}, \qquad \chi_{vakuum} = 0$$

Metamaterialien: $n < 0$

Reflektivität: $R = \frac{I_r}{I_i} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2$ wenn $\perp$-einfallend

POYNTING VEKTOR

Beschreibt den Energiefluss.

Poyntingvektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

Energiedichte: $u = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$

Interpretation Poyntingvektor: $\frac{\partial}{\partial t} u = -(div\ \vec{S}) - \vec{J}_{free} \cdot \vec{E}$

Poynting für planare Wellen: $S(t) = \frac{1}{\mu_0} E_o B_0 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

POYNTING THEROEM, ENERGIEFLUSS

S: Poynting-Vektor (Energiefluss des EM-Feldes)
Ganzer Abschnitt unter Annahme, dass Material linear
w: Energiedichte

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div\ \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}, \qquad w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right)$$

Integralform:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w\, dV + \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A} = -\int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV$$

Ingenieursform:

$$div\,\vec{S}+\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{\vec{B}}{\mu_0}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{j}\cdot\vec{E}=0$$

$$-\oint_{\partial V}\vec{S}\cdot d\vec{F}=\iiint_V\left(\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\sigma\vec{E}\cdot\vec{E}\right)dV$$

INTENSITÄT

Intensität = |Amplitude|^2

WAVE MODEL

$$v=f\,\lambda,\qquad E=h\,v$$

PARTICLE MODEL

$$E=h\,f$$

WELLEN

EBENE WELLEN

Wellenvektor:

$$\vec{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Wellendarstellung:

$$\xi(\vec{r},t)=A\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})$$

Wellenfront (= Orte gleicher Phasenlage):

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=const.$$

KUGEL-/KREISWELLEN

Wellendarstellung:

$$\xi(\vec{r},t)=A\sin\left(\omega t-|\vec{k}||\vec{r}|\right)$$

Wellenfronten:

$$|\vec{r}|=const.$$

INTERFERENZ

$\vec{r}_1,\vec{r}_2$: Vektor von der gegenw. Position zur Quelle der Kugelw.
konstruktiv: $|\vec{r}_1|-|\vec{r}_2|=n\lambda,\ n\in\mathbb{Z}$
destruktiv: $|\vec{r}_1|-|\vec{r}_2|=(2n+1)\frac{\lambda}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

HUYGENS'SCHES PRINZIP

Von jedem Punkt einer Wellenfront geht eine Kugelwelle aus.

SENKRECHTE REFLEXION

Trifft eine Welle $\xi_i(z,t)=A\sin(\omega t-kz)$ senkrecht auf ein undurchdringliches Hindernis bei $z=0$, entsteht eine rücklaufende Welle:

$$\xi_f(z,t)=A\sin(\omega t+kz+\Delta\varphi)$$

Bei festem Ende: Phasensprung $\Delta\varphi=\pi$
Bei losem Ende: Phasensprung $\Delta\varphi=0$

Ein- und auslaufende Wellen überlagern sich:

$$\xi(z,t)=\xi_i(z,t)+\xi_f(z,t)$$

Am Ort der Reflexion:
festes Ende: „Knoten" $\xi(0,t)=0$
loses Ende: „Bauch" $\xi(0,t)=2A\sin(\omega t)$

STEHENDE WELLEN

$$\xi(z,t)=\xi_i(z,t)+\xi_f(z,t)$$
$$=A(\sin(\omega t-kz)+\sin(\omega t+kz+\Delta\varphi))$$
$$=A\cos\left(kz+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\omega t+\frac{\varphi}{2}\right)$$

RESONANZ

Auf beiden Seiten fest, so ist der Abstand: $L=n\frac{\lambda}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

Auf einer Seite fest, auf der anderen lose: $L=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$

DIVERSES

POLARKOORDINATEN

Kraft = Masse * Beschleunigung gilt hier nicht mehr!!

ZYLINDERKOORDINATEN

$$x=\rho\cos(\varphi),\qquad y=\rho\sin(\varphi),\qquad z=z$$
$$dV=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

KUGELKOORDINATEN

$dV=r^2\sin(\vartheta)\ dr\ d\varphi\ d\vartheta$
$dS=r^2\sin(\vartheta)\ d\varphi\ d\vartheta$
Kugelvolumen:
$V=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}r^2\sin(\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,dr$
$=\int_0^R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}r^2\cos(\theta)\,d\varphi\,d\theta\,dr=\frac{4}{3}\pi r^3$
$A=4\pi r^2$

KONSTANTEN

Pi: $\pi=3.14159\ldots$
Euler: $e=2.71828\ldots$
Planck: $\hbar=\frac{h}{2\pi}=1.054E-34\ \frac{kg\cdot m^2}{s}$
Gravitationskonstante: $G=6.673E-11\ m^3kg^{-1}s^2$
Coulomb: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9E9\frac{Nm^2}{C^2},\ [q]=C$
Elektronenvolt: $1\ eV=1.602E-19J$
Masse eines Elektrons: $m_e=9.11E-31kg$
Masse eines Protons: $m_p=1.67E-27kg$
Atommasseeinheit: $u=1.66E-27\ kg$
Ladung eines Elektrons: $q_e=-1.602E-19\ C$
Dielektrizitätskonstante: $\varepsilon_0=8.854E-12\frac{F}{m}=\cdots\frac{As}{Vm}$
Permeabilitätskonstante: $\mu_0=1.2566E-6\frac{N}{A^2}=4\pi E-7\frac{Vs}{Am}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: $c=2.998E8\frac{m}{s}$
Normdruck: $P_n=101325\frac{N}{m^2}=\cdots Pa$
$\gamma=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=6.67\cdot10^{-11}\frac{m^3}{kg\cdot s^2}$
Erde: Radius $=6.378E6\ m$, Masse $=5.97E24\ kg$
Druck: $1\ bar=1E5\frac{N}{m^2}=1E5\ Pa,\ 1\ atm=101325\ Pa$

VEKTORRECHNUNG

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

$\vec{a}\times\vec{b}=0\rightarrow$ Vektoren parallel oder einer $\vec{0}$.
distributiv: $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
nicht assoziativ: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$
bilinear: $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$

ANDERES MATH

Kugel: $V=\frac{4\pi}{3}r^3,\ S=4\pi r^2$
Kreis: $U=2\pi r,\ A=\pi r^2$

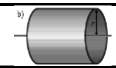
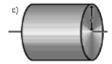
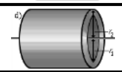
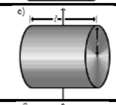
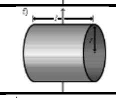
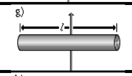
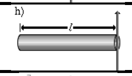
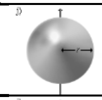
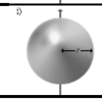
$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\alpha),\qquad\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha)$$

Laplace-Operator (Vektorfelder):

$$\Delta\vec{A}=grad(div\,\vec{A})-rot(rot\,\vec{A})$$

Laplace-Operator (Skalarfelder): $\Delta f=div(grad\,f)$

WEITERE TRÄGHEITSMOMENTE

	Zylindermantel $I=mr^2$
	Vollzylinder $I=\frac{1}{2}mr^2$
	Hohlzylinder $I=\frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2)$
	Vollzylinder $I=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{12}ml^2$
	Zylindermantel $I=\frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2)+\frac{1}{12}ml^2$
	$I=\frac{1}{12}ml^2$
	$I=\frac{1}{3}ml^2$
	Vollkugel $I=\frac{2}{5}mr^2$
	Kugelschale $I=\frac{2}{3}mr^2$
Allgemein (Rotation um z-Achse)	$I=\rho\int_V(x^2+y^2)dV$

EINHEITEN

Grösse	Einheit
Elektrische Feldstärke $\vec{E}$	V/m
Magnetische Feldstärke $\vec{B}$	A/m
Elektrische Stromdichte $\vec{J}$	A/m^2
Magn. Induktion, Flussdichte $\vec{B}$	$T=Vs/m^2$
Elektr. Leitfähigkeit σ	$1/(\Omega m)$
Magn. Leitfähigkeit μ	$Vs/(Am)$
Dipoldichte, Polarisation $\vec{P}$	As/m^2
magn. Dipoldichte, Magnetisierung $\vec{M}$	A/m
elektr. Suszeptibilität χ_e	-
magn. Suszeptibilität χ_m	-
Dielektr. Verschiebungsdichte $\vec{D}$	As/m^2
Magn. Induktion, Flussdichte $\vec{B}$	$T=Vs/m^2$
Strom I	$A=C/s$
Magnetischer Fluss Φ_{mag}	$1/(\Omega s)$
Spannung U	V
Magn. Spannung Θ	A
Widerstand R	Ω
magn. Widerstand R_m	$1/(\Omega s)$
Kapazität C	$F=s/\Omega$
Induktivität L	$H=\Omega s$
Ladung Q	$C=As$
Linienladungsdichte λ	As/m
Flächenladungsdichte σ	As/m^2
Volumenladungsdichte ρ	As/m^3
Flächenstromdichte α	A/m

MÖGLICHE FEHLERQUELLEN / IDEEN

- **Volumenladungsdichte -> Ladung nicht auf Oberfläche**
- **Potential -> Vorzeichen richtig?**
- **a << b oder a>>b -> Taylor-Entwicklung**
- **Diff'gl nicht lösbar -> Taylor**
- **Konvention beachtet? Vektor neg. -> pos. Ladung**
- **Materialien?**
- **Ableiten um Integrale aus DGLs zu entfernen**
- **Homogene Ladungsverteilung?!**
- **1/(4PiEpsilon) nicht vergessen?**
- **E-Feld in Kugelkondensator nicht homogen!**
- **Frequenz -> BGL -> harm. Oszillator**

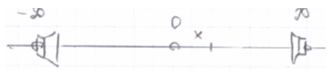
BLABA

$$div\,(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(rot\,\vec{A})-\vec{A}\cdot(rot\,\vec{B})$$

Zusammenfassung:

$$\boldsymbol{\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'}\qquad\boldsymbol{\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'}$$

BEISPIEL SCHALLWELLEN, ÜBERLAGERUNG



Intensitätsmax für: $2x=0,\pm\lambda,\pm2\lambda,\pm3\lambda,\ldots$
Intensitätsmin. für: $2x=\pm\frac{1}{2}\lambda,\pm\frac{3}{2}\lambda,\pm\frac{5}{2}\lambda,\ldots$

ANMERKUNGEN ZUM SCHLUSS

Magnetische Feldlinien gehen von N nach S, schneiden nie
Elektrische Feldlinien von + zu -, ⊥ auf Leiter, schneiden nie