LINEARE ALGEBRA

Zusammenfassung zur Vorlesung von
Prof. Dr. K. Nipp

Lukas Cavigelli, Juli 2010
lukasc@ee.ethz.ch

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

$Ax = b$ m = # Zeilen = # Gleichungen im LGS
n = # Spalten = #. Variabeln im LGS
r = Rang = # Nicht-Nullzeilen im Endschema

- **Keine Lösung**
  $\boldsymbol{r < m}$ **Letzte Zeile:** $\boldsymbol{0 = c_m}$ **wobei** $\boldsymbol{c_m \neq 0}$
- **Unendlich Viele Lösungen**
  $\boldsymbol{m = r < n}$ **Nullzeile ergibt freie Parameter**
- **Genau eine Lösung**
  $\boldsymbol{r = m}$ **Eindeutig, wenn** $\boldsymbol{r = n}$

HOMOGENES LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM

- Alle rechten Seiten sind gleich 0.
- nichttriviale Lösungen ($x_n \neq 0$), wenn $r \leq n$
- Ein LGS ist genau dann für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung besitzt.

GAUSS-VERFAHREN

Widerspruch im Gaussverfahren ⇒ unlösbar.
Für Nullzeilen Parameter einführen.

MATRIZEN

$A + B = B + A$ $\quad$ $(A + B) + C = A + (B + C)$
$(AB)C = A(BC)$ $\quad$ $(A + B)C = AC + BC$
$A(C + D) = AC + AD$ $\quad$ $AB \neq BA$

RECHENREGELN

- **Matrix Addition**
  Addition der einzelnen Elemente
- **Skalar-Matrix Multiplikation**
  Multiplikation der einzelnen Elemente mit dem Skalar
- **Matrix-Matrix Multiplikation**
  $\boldsymbol{A^{m\times n}B^{n\times p} = (AB)^{m\times p}}$**, Zeile x Spalte**

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} & . \\ \mathbf{b_3} & . \\ \mathbf{b_5} & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3} b_5 & . \\ . & . \end{bmatrix}$$

TRANSPONIERTE

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{"Spiegeln an der Diagonalen"}$$

1. Zeile wird 1. Spalte, 1. Spalte wird 1. Zeile, ...

$(A^T)^T = A \quad (A + B)^T = A^T + B^T \quad (AB)^T = B^T A^T$

Eine Matrix ist **symmetrisch**, wenn $A^T = A$.

RANG

≡ Anzahl Nicht-Nullzeilen nach Gauss
≡ Dimension des aufgespannten Raums

INVERSE

"Berechne wenn möglich nie die Inverse einer Matrix"

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar (=regulär, sonst singulär)

Formel für 2x2 Matrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$$

Allgemein: Gauss mit $(\mathrm{A} \mid \mathrm{I_n})$ **bis** $(\mathrm{I_n} \mid \mathrm{A}^{-1})$

Mit Cramer'scher Regel: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Ad}(A))^T$

Für quadratische Matrizen A, B gilt:

$(A^{-1})^{-1} = A \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ → Achtung Reihenfolge!
$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
$B = T^{-1}AT \Leftrightarrow TB = AT \quad (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$

ORTHOGONALE MATRIX

≡ $A^T A = AA^T = I_n$
≡ Skalarprodukt zweier Spalten = 0
≡ $A^T = A^{-1}$ = orthogonal
⇒ AB orthogonal, wenn A, B orthogonal
≡ A quadratisch, invertierbar, regulär
≡ $|\det(A)| = \lambda_i = 1$ ≡ Längentreue
≡ $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ ≡ Winkeltreue

REGULÄRE MATRIX

≡ A invertierbar $\quad$ ≡ $\det(A) \neq 0$
≡ $\mathrm{Rang(A) = n}$ $\quad$ ≡ $\dim(\mathrm{Kern}(A)) = 0$
≡ Spalte/Zeile linear unabhängig $\quad$ Regulär ⇒ quadratisch
≡ Ax = b eindeutig für jedes b lösbar
≡ $Ax = 0$ nur triviale Lösung 0 $\quad$ A, B regulär ⇒ AB regul.

SINGULÄRE MATRIX

≡ $\det(A) = 0$ → nicht invertierbar $\quad$ ≡ ¬regulär

ADJUNKTE

$$\underbrace{\mathrm{Ad}(A)}_{\substack{\text{Adjunkte,} \\ \text{NICHT Adjungierte}}} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

SPUR

Spur: Summe der Diagonalelemente. Spur = trace = tr
$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{tr}(A) + \beta\,\mathrm{tr}(B)$
$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \quad \mathrm{tr}(a^T b) = \mathrm{tr}(ab^T)$
Achtung: $\mathrm{tr}(AB) \neq \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$

LR-ZERLEGUNG

$$A = L \cdot R \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

Verfahren: L=$\mathrm{I_n}$, dann unten links die durchgeführten Gaussschritte eintragen und in der R-Matrix das Gaussresultat.
Vorgehen: Schreibe die Faktoren des Gauss Verfahrens in L.
Achtung Vorzeichen: *Substrahiert* man die obere Zeile 3-mal von der unteren, schreibt man eine 3 in die L-Matrix, nicht -3.
Anwendung: Löse $Ax = b$ nach x auf:
1. LR Zerlegung
2. $Lc = Pb$ nach c auflösen
3. $Rx = c$ nach x auflösen

Permutations-Matrix (LRP-Zerlegung): $P \cdot A = L \cdot R$
P ist Permutationsmatrix und beschreibt Zeilenvertauschungen.
Anwendung: siehe oben. Bei normaler LR-Zerlegung ist $P = I$.

DETERMINANTEN

$\det(A) = |A|$ $\quad$ - Gibt an ob Lösungen für LGS existiert
- Volumen des aufgespannten Spats

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ $\quad$ $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ regulär
$\det(rA) = r \cdot \det(A)$
$\det(A^T) = \det(A)$ $\quad$ $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

Zwei Matrizen sind **ähnlich**, wenn $\det(A) = \det(B)$.

AUSSAGEN ÜBER LÖSUNGEN DES LGS

$\boldsymbol{\det(A) \neq 0}$ $\quad$ $Ax = 0$: nur triviale Lösung
$Ax = b$: genau eine Lösung

$\boldsymbol{\det(A) = 0}$ $\quad$ $Ax = 0$: unendlich viele Lösungen
$Ax = b$: keine oder unendlich viele

Fredholm-Alternative: $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn $b \perp$ auf alle Lösungen von $\underbrace{A^T y = 0}_{\text{Adjung. Gl.Sys.}}$ steht.

BERECHNUNG

- **Gauss:**
  - Zeilen vertauschen: Vorzeichen ändert
  - Vielfaches anderer Zeile addieren: ändert nichts
  - Zeile mit Faktor k multiplizieren: k·det()
  - Faktor rausziehen: $\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
  - Lin. abh. Spalten → $\det A = 0$
  - Ziel: Obere Dreiecksmatrix. Dies entspricht eigentlich der L-R-Zerlegung. $\det(A) = \det(R)$
- **2x2:** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{ad - bc}$
- **3x3:** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix} = \boldsymbol{aei + bfg + dhc - gec - bdi - hfa}$
- **Nach Zeile/Spalte Entwickeln:**
  $\mathrm{Ad}(A)$ elementweise mit A multiplizieren. Die Summe der Elemente einer Spalte oder Zeile entspricht der Determinante
- **Dreiecksmatrix:** det = Produkt der Diagonalelemente.

VEKTORRÄUME

- **Menge von Objekten mit:**
  - Addition definiert
  - Multiplikation mit reellen Zahlen definiert
  - Es gelten folgende Rechenregeln:

  $a + b = b + a$ $\quad$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
  $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ $\quad$ $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
  Nullvektor: $a + 0 = 0$ $\quad$ Gegenvektor: $a + (-a) = 0$
  Einheitsvektor: $1a = a$
  Bsp: $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \mathbb{C}^n$, Polynome
- **Unterraum** Eine nichtleere Teilmenge $\mathbf{U}$ eines Vektorraums $\mathbf{V}$ heisst Unterraum falls:
  - $a, b \in U$ auch $(a + b) \in U$
  - $a \in U, \alpha \in \mathbb{R}$, auch $\alpha a \in U$
  - $U_1 \cap U_1$ ist ein Unterraum von V
  - $U_1 + U_2$ ist ein Unterraum von V

  Ein Unterraum ist $\underbrace{\{\vec{x} | A\vec{x} = 0\}}_{\text{Kern}}$
- **Linearkombination**

  $$\boldsymbol{b = x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \cdots + x_n a^{(n)} \neq 0} \rightarrow$$

  → erzeugt Unterraum $\boldsymbol{span}\{\boldsymbol{a}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{a}^{(n)}\}$
- **Linear Unabhängig**
  Der Nullvektor ist linear abhängig.
  Linear unabhängig ⇔ $\boldsymbol{\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots) \neq 0}$

  $$x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \cdots + x_n a^{(n)} \neq 0$$
- **Erzeugendensystem/Linearkombination** Kann jeder Vektor b eines Vektorraums $\boldsymbol{V}$ als Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{a}^{(1)} \dots \boldsymbol{a}^{(n)}$ von $\boldsymbol{V}$ dargestellt werden, so ist $\boldsymbol{a}^{(1)} \dots \boldsymbol{a}^{(n)}$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums $\boldsymbol{V}$. $\boldsymbol{span}\{\boldsymbol{a}^{(1)} \dots \boldsymbol{a}^{(n)}\}$

  Besitzt ein Vektorraum ein Erzeugendensystem, so ist er endlichdimensional.
- **Basis** $\boldsymbol{a}^{(1)} \dots \boldsymbol{a}^{(n)}$
  - linear unabhängig
  - Erzeugendensystem
  - $r = m = n$
- **Verfahren zum Bestimmen einer Basis aus Vektoren** $\boldsymbol{v_1 .. v_n}$**:**
  v_1 bis v_n als Spaltenvektoren in Matrix → Gauss → Pivotspalten bilden eine Basis

Vektorraum $\boldsymbol{V}$**,** $\boldsymbol{\dim(V) = n}$**:**
- mehr als n Vektoren sind linear abhängig
- Weniger als n Vektoren sind nicht erzeugend

- n Vektoren sind linear unabhängig, wenn sie erzeugend sind → Basis

SKALARPRODUKT

Eine Vorschrift die 2 Vektoren eine Zahl zuordnet (x, y).

- **Regeln:**
  - Linear im 2. Faktor:

$$\langle x|\alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \alpha\langle x|y_1\rangle + \beta\langle x|y_2\rangle, \qquad \langle Ax|y\rangle = \langle x|A^T y\rangle$$
$$\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle, \qquad \langle x|x\rangle \geq 0, \qquad \langle x|y\rangle^2 = \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$$
$$\langle x|y\rangle = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

- **Orthogonale Projektion von x auf y**

$$\|\bar{x}'\| = \|\bar{x}\| \cdot \|e_y\| \cdot \cos(\alpha) = (\bar{x}, e_y), \qquad x' = \frac{\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle} y$$

Defintion Einheitsvektor:

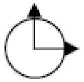
$$\|x\| = 1$$

VEKTOR-NORMEN

Eine Norm ist eine Vorschrift, die jedem Vektor eine reelle Zahl zuordnet. **Regeln:**

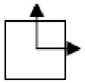
$$\|a\| \geq 0, \qquad \|\alpha a + \beta b\| = \alpha\|a\| + \beta\|b\|$$

- **Euklidische Norm (L_2) (Achtung: Skalarprod!)**



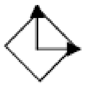
$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

- **Maximumnorm (L_∞)**



$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$$

- **Betragssummen-Norm (L_1)**



$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

MATRIX-NORMEN

Die Euklidische Norm heisst auch L2-Norm.

- $\|A\|_\infty$: Maximale Zeilensummennorm. Betrag der einzelnen Einträge addieren. Grösste Summe ist die Norm.
- $\|A\|_1 = \max_j\left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|\right)$: Spaltensummennorm
- $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$: Spektralnorm, wobei λ_{max} der höchste EW von $A^T A$ ist. A muss quadratisch sein.
- $\|A^{-1}\|_2 = 1/\sqrt{\lambda_{min}(A^T A)}$. A muss quadratisch sein.
- $\|A\|_2 = |\lambda_{max}(A)|$, wenn A symmetrisch.
- $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{|\lambda_{min}(A)|}$, wenn A symmetrisch.
- $\|A\|_2 = 1$, wenn A orthogonal.
- $\|A\|_F = \sqrt{\text{Summe aller Elemente im Quadrat}}$

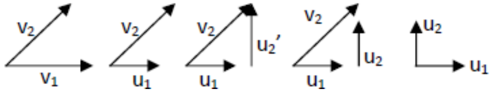
ÜBERBESTIMMTE GLEICHUNGSSYSTEME

$Ax = c, \quad m \gg n$ **Methode der kleinsten Quadrate**

1. Fehlergleichung $Ax - c = r$ bestimmen. (r = Residuenvektor)
2. $A^T Ax = A^T c$ nach x auflösen. → $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ ist minimal

Mit Matlab: `x = A \ c ;`

SCHMIDTSCHES ORTHOGONALISIERUNGSVER.



Finden einer orthonormalen Basis nach Schmidt:

1. v_1 normieren: $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, wobei das Untere die Norm ist.
2. Vektor senkrecht auf u_1 finden: $u_2' = v_2 - (v_2, u_1) \cdot u_1$
3. u_2' normieren

QR-ZERLEGUNG

$A = QR$ — Q: orthonormale Matrix, orthonormale Basis; R: obere Dreiecksmatrix.

Anwendung: $Ax - c = r$ lösen (vgl. Methode der kl. Quadrate)

$A = QR \to Q^T A = R \qquad d = Q^T c \to c \qquad Rx = d \to x$

Berechnung: Bsp: Überbestimmtes Gleichungssystem:

```
A=[1 0 0; 1 1 0; …]    c=[280; 390;  …]
[Q,R]=qr(A)
d=transpose(Q)*b
R0=R(1:3,1:3)  (wählt die ersten drei Zeilen und Spalten)
d0=d(1:3)
x=R0\d0
```

Etwas einfachere Matlab-Lösung: `x = A \ c ;`

LINEARE ABBILDUNGEN

$\mathcal{F}: x \in V^n \to y = \mathcal{F}(x) \in V^m$

Form einer linearen Abbilung: $f(x) = Ax$. Es gilt:

- $\mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$
- $\mathcal{F}(\alpha x) = \alpha\mathcal{F}(x)$

Bew.: Drehstreckung eines Vektors, Winkel und Streckung ber.

- **Kern**

  Der Kern ist die Teilmenge des Wertebereichs die bei der Abbildung verschwindet. $\{x \in V^n \mid Ax = 0\}$

  Berechnung: $Ax = 0 \to$ Lösungsmenge ist Kern

  $\dim(\text{Kern}(A)) = n - r$

- **Bild**

  Die Teilmenge des Bildes wird abgebildet: $\{x \in V^n \mid Ax = b\}$

  $\dim(\text{Bild}(A)) = \text{Rang}(A) = r$

  $\dim(Kern(A)) + \dim(Bild(A)) = \dim(V^n) = n$

  Berechnung: Wähle linear unabhängige und erzeugende Spaltenvektoren von A. → Wähle Pivotspalten nach Gauss. **Spalten dann aber aus Originalmatrix!**

ZUSAMMENSETZEN VON ABBILDUNGEN

$$\begin{tikzcd} & V^m \arrow[dr, "\mathcal{L}"] & \\ V^n \arrow[ur, "\mathcal{F}"] \arrow[rr, "\mathcal{L}\cdot\mathcal{F}"'] & & V^p \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}$: A
$\mathcal{L}$: B
$\mathcal{L}\cdot\mathcal{F}$: BA
(!)Reihenfolge

oder direkt Abb. durch Einheitsvektoren bestimmen.

UMKEHREN VON ABBILDUNGEN

$\mathcal{F}^{-1}: x' \to x = A^{-1}x' \qquad \mathcal{F}^{-1} = A^{-1} \qquad \mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^{-1} = I_n$

Abbildung ist umkehrbar, wenn A regulär ist ≡ $\det(A) \neq 0$

KOORDINATENTRANSFORMATION

$x = Ty$ — Eine umkehrbare, lineare Abbildung.

1. Spalte von T = Abbildung des 1. Einheitsvektors

Bei Transformation aus der Standardbasis hat T die neuen Basisvektoren als Spalten.

$$\begin{tikzcd} x \in V^n \arrow[r, "\mathcal{F}"] & x' \in V^n \\ y \in W^m \arrow[u, "T"] \arrow[r, "\mathcal{M}"] & y' \in W^n \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M} = T^{-1} \cdot \mathcal{F} \cdot T$$

Matrixmultiplikation bedeutet "nach"

Matrix der Abb. $\mathcal{F}$ (Matrix B) finden, wenn $\mathcal{M}$(Matrix A) und T gegeben: $TB = AT \Rightarrow (T|AT)$ gaussen, bis $(I|B)$

DREHMATRIX

$$\mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad \mathbb{R}^3(\text{um } y): \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\det(R) = 1, \qquad R^T = R^{-1}, \qquad R^T R = RR^T = I$$

Drehachse v ist Lsg von $(R - I)v = 0$. v ist EV von R mit EW 1.

Der Drehwinkel ist $\arccos\left(\frac{\langle w|Rw\rangle}{\|w\|\|Rw\|}\right)$ mit w orthogonal zu v.

ORTHOGONALE & LÄNGENTREUE ABB.

Orthogonale Abbildung: Winkel bleiben erhalten.
Längentreue Abbildung: Längen bleiben erhalten.
Jede längentreue Abb. ist auch winkeltreu und umgekehrt ⇔ Spalten sind orthonormale Basis

orthogonal: $\quad A^T A = I_n \qquad A^T = A^{-1} \qquad \|A\|_2 = 1$

DAS EIGENWERTPROBLEM

- **Eigenwert**

$$Ax = \lambda x \qquad \det(A - \lambda I_n) = 0 \to \lambda_{1,2,\ldots}$$
$$ChP(\lambda) = 0 \to \lambda = EW$$
$$ChP(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\,\text{spur}(A) + \det(A), \qquad (n = 2)$$
$$ChP(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2\,\text{spur}(A) - c_2\lambda + \det(A), \qquad (n = 3)$$
$$c_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix}$$

$$\text{EW}(A) = \lambda_1, \lambda_2, .. \qquad EW(A + \mu I) = \lambda_1 + \mu, \lambda_2 + \mu, \ldots$$
$$EW(A^k) = \lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots k \in \mathbb{N} \qquad EW(\alpha A) = \alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots$$
$$A \text{ invertierb.} \Leftrightarrow 0 \notin EW(A) \Rightarrow EW(A^k) = \lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots k \in \mathbb{Z}$$
$$\det(A) = 0 \Rightarrow \text{min. ein EW} = 0$$

- **Eigenvektor**

  $(A - \lambda_{1,2} I_n)\overline{u_{1,2}} = 0$ Mit Gaussverfahren nach $\bar{u}$ auflösen.

- **Eigenraum**

  E_λ: die Eigenvektoren zu einem Eigenwert spannen den Eigenraum auf.

- **Algebraische Vielfachheit** Die Vielfachheit eines Eigenwerts.

  Alg. Vielf. ≥ geom. Vielf. für alle EW

  Bsp: Charakteristisches Polynom: $(x - \lambda_1)^1 \cdot (x - \lambda_2)^3 = 0$

  → λ_1: Alg. Vielf. = 1 → λ_2: Alg. Vielf. = 3

- **Geometrische Vielfachheit**

  $\dim(Eigenraum)$ EW einsetzen → geom.Vielf. = Anz. freie Parameter nach Gauss Verfahren.

- **Eigenbasis**

  Basis von Eigenvektoren. Existiert, wenn für jeden EW die **geometrische Vielfachheit = algebraischer Vielfachheit.**

$\prod_k \lambda_k^{(\text{Alg. Vielf.})} = \det(A)$ mit A: $n \times n$ Matrix

EINFACHE UND HALBEINFACHE MATRIZEN

einfach: jeder EW hat **alg. Vielf. = 1** und somit **geom. Vielf. = 1**
halbeinfach: für jeden EW **alg. Vielf. = geom. Vielf.**
→ Jede einfache Matrix ist auch halbeinfach.
→ **Zu jeder einf. oder halbeinf. Matrix gibt es eine Eigenbasis**

ÄHNLICHE MATRIZEN

Wenn gilt $A = T^{-1} \cdot B \cdot T$, sind A und B ähnlich ⇔ A und B haben die selben Eigenwerte.

- Jede quadratische Matrix A hat minimal 1 Eigenwert
- A hat höchstens n Eigenwerte
- 1 ≤ algebraische Vielfachheit ≤ n
- 1 ≤ geom. Vielfachheit von λ ≤ alg. Vielfachheit
- Ähnliche Matrizen haben gleiche Eigenwerte
- $\lambda_1, \lambda_2, ..$ versch. EW → $u_1, u_2, ..$ zugehörige EV → EV sind linear unabhängig

DAS EW PROBLEM SYMMETR. MATRIZEN

A sei eine reelle Matrix. Es gilt:

- Alle EW sind reell
- EV zu verschiedenen EW stehen senkrecht aufeinander
- A ist halbeinfach (alg.Vielf. = geom.Vielf.)
- Es gibt eine orthonormale Basis zu A
- A ist diagonalisierbar: $D = T^{-1}AT$

DIAGONALISIERBARKEIT

$$D = T^{-1}AT, \qquad A = TDT^{-1}$$

Jede quadratische Matrix A heist diagonalisierbar, falls dazu eine reguläre Matrix T existiert so dass D diagonal ist.

D: Hat Eigenwerte in Diagonale
T: Linear unabhängige Eigenvektoren in Spalten

T orthogonal gesucht → Skalarprodukt = 0

≡ halbeinfach → via EW best. ≡ besitzt Eigenbasis
≡ diagonalisierbar ≡ $\lambda_k \in \mathbb{R}\ \forall k$
≡ $\text{Alg.Vielf.}(\lambda_k) = \text{Geom.V.}(\lambda_k)\ \forall k$

BERECHNUNG VON $y = A^k x$

1. Löse EW Problem. Bestimme T, D so dass $D = T^{-1}AT$
2. Löse LGS: $Tz = x$ nach z auf.
3. Berechne D^k dann $w \equiv D^k z$ $\qquad A^n = TD^nT^{-1}$

4. Berechne $y = Tw$

Bemerkung: Wenn **A symmetrisch** ist, ist T orthogonal. In diesem Fall gilt $A^n = TD^nT^T$, es muss kein LGS gelöst werden.

DIE KONDITION EINER MATRIX

$\kappa(A) \equiv \|A\|\|A^{-1}\| = \sqrt{\frac{\mu_{max}}{\mu_{min}}}$ wobei μ=EW von AA^T

Wenn A symmetrisch ist, gilt: $\kappa(A) = \left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right|$

Die Kondition beschreibt die max. Fehlerverstärkung bei nummerischen Berechnungen.

MATLAB BEFEHLE

- Matrix $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ eingeben: `A=[1 2; 3 4]`
- Inverse: `B=A^(-1)`
- Transponierte: A^T= `A'`
- LR-Zerlegung:
  1. `A=[…;…;…]`
  2. `b=[… … …]'`
  3. `[L,R,P]=lu(A)`
  4. `y=L\(P*b)`
  5. `x=R\y`
- Determinante: `det(A)`
- QR-Zerlegung: `[Q,R]=qr(A)`
- 1. x Spalten und erste y Zeilen: `R0=R[1:y,1:x]`
- $^1/_v$ = `V^(-1)`
- $\sqrt{x}$ = `sqrt(x)`
- Eigenwerte: `[T,D]=eig(A)` wobei T die EV in den Spalten hat und D die EW in der Diagonalen.

LINEARE DGL-SYSTEME MIT TRAFO-METHODE

LDGS: $\dot{y}(t) = Ay(t)$, AB: $y(t_1) = y_0$

Konzept: Koord-Trafo $\vec{y}(t) = T\vec{x}(t)$ um System zu entkoppeln.

1. $\vec{x}(t) = T^{-1}\vec{y}(t)$
2. Lösungen finden für $\vec{x}(t)$
3. $\vec{y}(t) = T\vec{x}(t)$

AWP 1. ORDNUNG

$$\dot{\vec{x}}(t) = D\vec{x}(t), \qquad x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = T\vec{x}(t) = c_1\vec{u_1}e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\vec{u_n}e^{\lambda_n t}$$

Mit Anfangsbedingungen: $T\vec{x}(t = t_1) = \vec{y}(t = t_1)$

Bei komplex-konj. Eigenwerten λ_k, λ_{k+1}: $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$

$$x_k(t)u^{(k)} + x_{k+1}u^{(k+1)} = 2e^{\alpha_k t}\Big((a_k\cos(\beta_k t) - b_k\sin(\beta_k t))v^{(k)} - (a_k\sin(\beta_k t) + b_k\cos(\beta_k t))w^{(k)}\Big)$$

$$y(0) = c_1u^{(1)} + \cdots + \overbrace{c_{k-1}}^{\hat{c}_{k-1}}u^{(k-1)} + \overbrace{2a_k}^{\hat{c}_k}v^{(k)}\overbrace{-2b_k}^{\hat{c}_{k+1}}w^{(k)} + c_{k+2}u^{(k+2)} + \cdots + c_nu^{(n)}$$

mit $v^{(k)} = \Re(u^{(k)})$ und $w^{(k)} = \Im(u^{(k)})$, dann definieren wir:

$$\hat{T} \coloneqq (u^{(1)}; \dots; u^{(k-1)}; v^{(k)}; w^{(k)}; u^{(k+2)}; \dots; u^{(n)})$$

und ergibt sich das reelle LGS $\hat{T}\hat{c} = y(0)$

AWP 2. ORDNUNG

$$\ddot{\vec{x}}(t) = D\vec{x}(t), \qquad \omega_k = \sqrt{-\lambda_k}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a_1\cos(t\sqrt{-\lambda_1}) + b_1\sin(t\sqrt{-\lambda_1}) \\ \vdots \\ a_n\cos(t\sqrt{-\lambda_n}) + b_n\sin(t\sqrt{-\lambda_n}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = T\vec{x}(t)$$

Mit Anfangsbedingungen:

$$T\vec{x}(t = t_1) = \vec{y}(t = t_1), \qquad y(0) = Tx(0) = T\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

$$T\dot{\vec{x}}(t = t_2) = \dot{\vec{y}}(t = t_2), \qquad \dot{y}(0) = T\dot{x}(0) = T\begin{pmatrix} b_1\sqrt{-\lambda_1} \\ \vdots \\ b_k\sqrt{-\lambda_k} \end{pmatrix}$$

ANWENDUNGEN

LINEARE DGL 2. ORDNUNG

$\ddot{y}(t) = Ay(t)$ T: EV in Spalten, D. EW in Diag

Entkoppeln: $y(t) = Tx(t)$, $\ddot{y}(t) = T\ddot{x}(t)$

$T\ddot{x}(t) = ATx(t) \to \ddot{x}(t) = T^{-1}ATx(t)$

1. $\ddot{x}(t) = Dx(t) \to$ x bestimmen. Allg. Lösung $x = e^{at}$
2. Zurück: $y(t) = Tx(t)$

HARMONISCHER OSZILLATOR

$\ddot{x}_i(t) + w_i(t)^2x_i(t) = 0, \qquad w_i = \sqrt{-\lambda_i}$ (Freq), $\qquad i = 1,2,..$

Lösung: $x_i(t) = a_i\cos(w_it) + b_i\sin(w_it)$

ANFANGSWERTPROBLEM 1. ORDNUNG

$$\begin{cases}\dot{y}(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0\end{cases} \to y(t) = Tx(t), \qquad T = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots)$$

Transformationsmethode: $\dot{x}(t) = Dx(t)$, $Tx(0) = y_0$

Eigenwerte und –vektor bestimmen, dann:

Allg. Lösung: $y(t) = Tx(t) = c_1\vec{\lambda_1}e^{\lambda_1 t} + \cdots$

Fallunterscheidung:

1. $\lambda_k \in \mathbb{R}$, Vielfachheit = 1 $\to e^{\lambda_k t}$ ist eine Lösung
2. $\lambda_k \in \mathbb{R}$, Vielfachheit = m $\lambda_k \in \mathbb{R} \to$ $(\sum_{j=0}^{m-1} c_{j,k}t^j)e^{\lambda_k t}$ sind linear unabh. Lsg.
3. $\{\lambda_k, \overline{\lambda_k}\} \in \mathbb{C}, y(t) = c_0e^{\lambda_k t}$ $\lambda_k, c_0 \in \mathbb{C}$

$$= e^{\Re(\lambda_k)t}(c_1\cos(\Im(\lambda_k)t) + c_2\sin(\Im(\lambda_k)t))$$

$$\Rightarrow 2e^{\Re(\lambda_k)t}\left[(c_1\cos(\Im(\lambda_k)t) - c_2\sin(\Im(\lambda_k)t))\Re(\overrightarrow{\lambda_k}) - (c_1\cos(\Im(\lambda_k)t) + c_2\sin(\Im(\lambda_k)t))\Im(\overrightarrow{\lambda_k})\right]$$

ANDERE BEISPIELE

Norm-Beispiel:

$$\sup_{x^2+y^2=1}\left\langle M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle| M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle, \qquad M = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \sup_{x^2+y^2=1}\left\|M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|^2 = \|M\|_2^2$$

M symmetrisch $\to \|M\|_2 = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in$ EW von $M\}$

$ChP_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \lambda(\lambda - 2) \to$ Resultat: 4

Matrix als Summe von Matrizen mit Rang 1: $A = A_1 + A_2 + \cdots$

Bei der D-Matrix diese Summe bilden: $D = D_1 + D_2 + \cdots$

Dann zurücktransformieren: $A_k = TD_kT^{-1}$

ALLGEMEINES

Spur = Summe der Elemente der Hauptdiagonale

Bei reellen Matrizen: $\lambda \to \vec{\lambda} \Rightarrow \bar{\lambda} \to \bar{\vec{\lambda}}$

MATRIXEXPONENTIAL EINER DIAGBAREN M.

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{n!} = Te^DT^{-1} = T\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}T^{-1}$$

Formal ist $y(t) = e^{tA}y(0)$.

MATRIXPOTENZ EINER DIAGBAREN MATRIX

$$A^k = TD^kT^{-1} = T\begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k\end{pmatrix}T^{-1}$$

TODO:

Matlab: rückwärtsdivision

Format long

Eye(3)

Diag(..)

Geometrische Interpretation von Eigenwerten

Normen in MATLAB

<u>Facts ohne eigene Überschrift</u>:

Adjungierte Matrix: $= A^T$, wenn $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Hermitesche Matrix: $\equiv$ selbstadjungiert $\equiv (A^T = A)$

VEKTORPRODUKT

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\vec{u}\angle\vec{v})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ linear abhängig}$$

Eigenschaften: linear, antikommutativ, NICHT assoziativ:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$

Umwandlungen:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v})\cdot(\vec{w} \times \vec{x}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{x}) - (\vec{u}\cdot\vec{x})(\vec{v}\cdot\vec{w})$$

$$\to |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

SPATPRODUKT

$$\langle\vec{u}|\vec{v}|\vec{w}\rangle \coloneqq (\vec{u} \times \vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$

$$\langle\vec{u}|\vec{v}|\vec{w}\rangle = \langle\vec{v}|\vec{w}|\vec{u}\rangle = \langle\vec{w}|\vec{u}|\vec{v}\rangle = -\langle\vec{u}|\vec{w}|\vec{v}\rangle = -\langle\vec{w}|\vec{v}|\vec{u}\rangle = -\langle\vec{v}|\vec{u}|\vec{w}\rangle$$

MATLAB-COMMANDS

Kern	`null(A)`	Dimension	`ndims(A)`
Rang	`rank(A)`	Skalarprod v1	`a'*b`
Identität	`eye(3)`	Skalarprod v2	`dot(a,b)`
Modulus	`mod(3,2)`	Vektorprod	`cross(a,b)`
Rest	`rem(3,2)`	Pow Elementw	`.^`
Inverse	`inv(A)`	Prod elem.-w.	`.*`
Norm	`norm(a)`	Div elem.-w.	`./`
Kondition	`cond(A)`	Elem[0][0]	`A(1,1)`
Spur	`trace(A)`	Zeile	`A(1,:)`
Determ.	`det(A)`	Spalte	`A(:,1)`
Wurzel	`sqrt(x)`	orthonorm. Basis d. Bildes	`orth(A)`
Exp	`exp(x)`		
2^x	`pow2(x)`		
	`log(x)`		`round(x)`
Log.	`log2(x)`	Runden	`floor(x)`
	`log10(x)`		`ceil(x)`
	`sin(x)`		`asin(x)`
Trigonom.	`cos(x)`	Inv. trigonom.	`acos(x)`
	`tan(x)`		`atan(x)`
Hyperbol.	`asinh(x)`	Inv. Hyperbol	`asinh(x)`
Signum	`sign(x)`	Symbol. Var.	`syms x`

eye(2,3): $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Singulärwertzerlegung mit MATLAB:

```
[U,S,V]=svd(A)
disp('Die Singulaerwerte von A sind')
s1=S(1,1)
s2=S(2,2)
```

Nicht abs oder length!!!! norm!!!

Was macht abs?????

Householdermatrix:

$$H = I - 2vv^T$$

BEISPIEL ZU AWP 1. ORDNUNG

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} y(t), \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$

Eigenvektoren:

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^{(2)} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u^{(3)} = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{u}^{(2)}$$

Damit ist $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 1$ und $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$y(t) = ce^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^{-t}\left((a\cos(t) - b\sin(t))\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (a\sin(t) + b\cos(t))\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Damit ist $\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{T}\begin{pmatrix} c \\ 2a \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Man findet $c = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$

Die Lösung lautet also

$$y(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t}\cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-t}\sin(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SINGULÄRWERTZERLEGUNG

Sei A eine $m \times n$ Matrix mit Rang r und $A = USV^T$

$$S = \begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{pmatrix}, & wenn\ m \geq n \\ (\hat{S}|0), & wenn\ n \geq m \end{cases}$$

$$\hat{S} = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \dots, s_p), \qquad p = \min(m, n)$$

1.) $s_1 = \|A\|_2$, $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0$, $s_{r+1} = \dots = s_p = 0$

2.) s_i^2 sind Eigenwerte von A^TA, wenn $m \geq n$
bzw. von AA^T, wenn $m \leq n$

3.) Die Spalten $u^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$ von U und die Spalten $v^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ von V gilt:
$Av^{(i)} = s_i u^{(i)}$ und $A^T u^{(i)} = s_i v^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$
Wenn $m < n$, ist $Av^{(i)} = 0$, $i = p+1, \dots, n$
Wenn $m > n$, ist $A^T u^{(i)} = 0$, $i = p+1, \dots, m$

$u^{(i)}$: Links-Singulärvektoren, $v^{(i)}$: Rechts-Singulärvektoren

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\{v^{(r+1)}, \dots, v^{(n)}\}, \mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\{u^{(1)}, \dots, u^{(r)}\}$$

$$\mathrm{Kern}(A^T) = \mathrm{span}\{u^{(r+1)}, \dots, u^{(m)}\}, \mathrm{Bild}(A^T) = \mathrm{span}\{v^{(1)}, \dots, v^{(r)}\}$$

Kondition $\kappa(A) = \frac{s_1}{s_n}$, wenn A regulär, $n \times n$.

Bei A: $n \times n$, symmetrisch: $s_i = |\lambda_i|$, $i = 1, \dots, n$, wenn λ_i entsprechend geordnet (Beträge absteigend)