

KOMPLEXE ANALYSIS

Zusammenfassung zur Vorlesung von Prof. Dr. A. Iozzi

Lukas Cavigelli, Juli 2010
lukasc@ee.ethz.ch

GRUNDLAGEN

KOMPLEXE ZAHLEN

$$i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \frac{1}{i} = -i$$
$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

EINFACHE OPERATIONEN

Konjugation: $z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy, \quad \left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
 $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Komponentenextraktion: $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \Im(z) = \frac{1}{2}i(\bar{z} - z)$

Betrag/Abstand zu 0: $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
 $|e^z| = e^{\Re(z)}$

Inversion: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{|z|} e^{-i\phi}$

Dreiecksungleichung: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Argument: $\arg(z) = \{\phi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi \right\}$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\phi) \\ y = r \cdot \sin(\phi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi \in \arg(x, y) \end{cases}$$
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Polar-Darstellung: $z = r e^{i\phi} = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$
 $\tan(\phi) = y/x$

WURZELZIEHEN

$$z^n = |z|^n e^{i \cdot n \cdot \arg(z)} = |a|^n e^{i(\arg(a) + 2\pi k)}$$

$$\rightarrow z_{0, \dots, n-1} = \sqrt[n]{|z|^n} e^{\frac{i(\arg(z^n) + 2\pi k)}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad a \in \mathbb{C}$$

Bsp: $z^4 = -1 \rightarrow z \in \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}$

Einfache Wurzeln: $\sqrt{-1} = i = e^{i\pi/2}, \quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$

TOPOLOGIE

• Umgebung

$\{z : |z - z_0| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$, mit ε als kleine, positive Zahl

• Innerer Punkt

Ein Punkt $z_0 \in S$ ist ein innerer Punkt, falls es eine Umgebung von z_0 gibt, die in S enthalten ist.

• Berührungspunkt

Ein Punkt $z_0 \in S$ ist ein Berührungspunkt von S , falls jede Umgebung von z_0 einen nicht leeren Durchschnitt mit S hat.

• Randpunkte ∂U

Randpunkte := $\{\text{Berührungspunkte}\} \setminus \{\text{innere Punkte}\}$

• Gebiet

Zusammenhängende offene Teilmenge in \mathbb{C}

TEILMENGEN-EIGENSCHAFTEN

• **offen:** falls alle Punkte, die ihr gehören, inner sind.

• **geschlossen:** falls sie alle ihre Berührungspunkte enthält

• **beschränkt:** falls es eine Konstante $R > 0$ gibt, sodass $S \subset \{z : |z| < R\}$

• **kompakt:** Teilmenge, die beschränkt und geschlossen ist.

• **zusammenhängend:** $S \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend, falls zwei Punkte in S durch einen Streckenzug verbunden werden können, der in S enthalten ist.

• **doppelt überdeckt:** Bsp.: $f(z) = z^2 = f(-z), z \in \mathbb{C}$

Eine Menge $S \subset \mathbb{C}$ wird **einfach zusammenhängend** genannt, wenn das Innere jeder einfachen geschlossenen Kurve nur Punkte von S enthält (=Menge ohne Loch).

Eine Menge wird **mehrfach zusammenhängend** genannt, wenn sie nicht einfach zusammenhängend ist.

WICHTIGE ZAHLEMENGEN

$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ = gelochte Ebene

$\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0}$ = geschlitzte Ebene

$\bar{K} := K \cup \{\text{Randpunkte}\} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

M := Menge aller Möbiustransformationen

L^1 := Menge aller integrierbaren Funktionen

C^n := Menge aller n -fachen ableitbaren Funktionen (\Rightarrow stetig)

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ = Einheitskreis

$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$ = obere Halbebene

$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ = Einheitskugel

$\mathfrak{Z}(\Omega) := \{\Gamma \subset \Omega \text{ geschl.}\}$ = Menge aller geschl. Kurven auf Ω

Beweisen in $\bar{\mathbb{C}}$: Wie in \mathbb{C} , aber Grenzen $(\infty, -\infty)$ separat prüfen.

$\infty - \infty = \frac{\infty}{0}, \quad \infty \cdot \infty = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = (\pm\infty)^0 = 1^{\pm\infty} = \text{undef}$

GLEICHUNGEN GEOM. BEDEUTUNG

• **Kreisscheibe:** $D_r(m) = \{z : |z - m| \leq r\}$

• **Kreis:** $\partial D_r(m) = \{z : |z - m| = r\}, \quad z, m \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{R}$

$$z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + m\bar{m} = r^2$$

param.: $r \cos(t) + i r \sin(t) = r e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi[$

param. Ableitung: $-r \sin(t) + i r \cos(t) = i r e^{it}$

• **Ellipse:** $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

param.: $(x_0 + a \cos(\varphi)) + i(y_0 + b \sin(\varphi)), \quad \varphi \in [0, 2\pi[$

• **Hyperbel:** $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

param.: $\left(x_0 + \frac{a}{\cos(\varphi)}\right) + i(y_0 + b \tan(\varphi)),$

$$\varphi \in \left\{ [0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \right\}$$

KURVEN

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist **geschlossen**, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Eine Kurve $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist **einfach**, falls

$\forall t_1, t_2 \in (a, b) : \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ = wenn sie sich nicht schneidet.

WINDUNGSZAHL EINER KURVE

$$\omega(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_0} dz, \quad \Gamma: \text{glatt, geschlossen}$$

KOMPLEXE FUNKTIONEN

• **Bild** von $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist $f(\Omega)$

• **Ein** (von evtl. mehreren) **Urbild** von $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist z

Reeller und imaginärer Teil einer Funktion sind reelle Funkt.

TRIGONOMETRISCH FUNKTIONEN IN \mathbb{C}

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$
$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \dots \text{siehe Analysis}$$

HYPERBOLISCHE FUNKTIONEN IN \mathbb{C}

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1, \dots \text{siehe Analysis}$$
$$\sinh(iz) = i \cdot \sin(z), \quad \cosh(iz) = \cos(z), \quad \tanh(z) = -i \tan(iz)$$

POTENZREIHENENTWICKLUNGEN

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{(z+1)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{wenn } |z| < 1$$

$$\frac{1}{z-\zeta} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}} z^n, & \text{wenn } |z| < |\zeta| \\ \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\zeta^{n+1}} z^n, & \text{wenn } |z| > |\zeta| \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z-z_0)^n$$

Konvergenzradius: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konv., wenn $r > |z-z_0|$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Alternative Entwicklungspunkte: substituieren

KURVEN IN DER KOMPLEXEN EBENE

Eine Kurve Γ in \mathbb{C} ist das Bild einer Abbildung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = x(t) + i \cdot y(t) \simeq (x(t), y(t))$ wobei I ein Intervall in \mathbb{R} ist. Falls $I = [a, b]$. $\gamma(a)$ ist der Anfangspunkt von Γ . $\gamma(b)$ ist der Endpunkt.

Parameterdarst.: Bild d. Kurve, Richtungssinn, Geschwindigkeit

Sei $t_0 \in [a, b], \gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) \in \Gamma$

Der **Tangentenvektor** an γ im Punkt $\gamma(t_0)$ ist $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + i \cdot y'(t_0)$. Länge des Vektors abhängig von Parameterdarst.

Tipp: Länge von Winkel trennen.

Verbindungsstrecke zwischen zwei Zahlen $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$:

$$\gamma(t) = (1-t)z + t w, \quad t \in [0, 1]$$

FUNKTIONEN

ABBILDUNGSEIGENSCHAFTEN

KONFORMITÄT/WINKELTREUE

Alle Winkel (inkl. Orientierung) werden erhalten. Eine **analytische, injektive** ($f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$) Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist konform. Die Umkehrung des Satzes ist auch wahr.

Verkettungen von konformen Abbildungen sind konform.

Konforme Gebietsabbildungen:

Die analytischen Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und f^{-1} sind konform, wenn f injektiv ($f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$) und $\exists f^{-1}$ und $f(\Omega)$ ein Gebiet und $(f^{-1})' \neq 0$ auf $f(\Omega)$.

Konform äquivalent: Zwei Gebiete, die sich konform aufeinander abbilden lassen.

Riemann'scher Abbildungssatz: Für jedes einfach zusammenhängende Gebiet existiert eine konforme Abbildung auf die Einheitskreis \mathbb{D} .

MÖBIUSTRANSFORMATION

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$
$$\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0, \quad z \neq -\frac{d}{c}$$

• Dreifache Transitivität (nicht 4-fache)

Für 3 Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ und 3 Punkte $w_1, w_2, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ gibt

es genau eine $T \in M$, so dass $T(z_j) = w_j, j = 1, 2, 3$

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

Dann Überprüfung was innen und aussen ist (Korrektur durch Vertauschen zweier Zahlen $w_1 \leftrightarrow w_2, z_1 \leftrightarrow z_2$).

• **Fixpunkte:** min. 1, höchstens 2

• **Konformität:** Alle MTs sind konform, somit auch **analytisch**

• **Kreistreue:** Kreise werden auf Kreise abgebildet in $\bar{\mathbb{C}}$

• **Riemannkugel:** Möbius-Trafos sind als Translationen und Rotation der Riemannkugel darstellbar.

• **Bestandteile:**

○ **Translation**

$$T_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z + c = T_c(z)$$

○ **Drehstreckung**

$$S_a: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto az = S_a(z)$$

○ **Inversion**

$$I: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = I(z)$$

SATZ VON WEIERSTRASS

$f_k: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots$, analytisch

$|f_k(z)| \leq c_k, \quad \forall z \in \Omega, \Rightarrow$ beschränkt

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty, \Rightarrow$ konvergiert

$\Rightarrow s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$, analytisch

und $s'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z), z \in \Omega$

Anwendung: Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

$\rightarrow f$ analytisch auf D_ρ

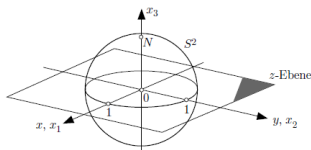
$\rightarrow f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, z \in \Omega$

RIEMANN'SCHE ZAHLENKUGEL

Realisierung (bijektive Abb.) von $\bar{\mathbb{C}}$ als Zahlenkugel.

Projektion $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Diese Abbildung ist konform (winkeltreu)



$$\vec{p}(z) = \begin{pmatrix} z + \bar{z} & i(\bar{z} - z) & |z - 1| \\ |z + 1| & |z + 1| & |z + 1| \\ x_1 & x_2 & 1 - x_3 + i \frac{x_2}{1 - x_3} \end{pmatrix}$$

VERZWEIGUNGSPUNKTE

Ein Punkt ω_0 heisst **Verzweigungspunkt**, wenn die mehrwertige Funktion $f^{-1}(\omega)$ auf einem um ω_0 laufenden Kreis nicht stetig ist. Um eine Stetige Umkehrfunktion zu haben, muss man einen Schlitz bis zum Verzweigungspunkt schneiden.

UMKEHRFUNKTIONEN

Die **Umkehrfunktion** einer eindeutigen analytischen Funktion f ist **analytisch** und es gilt: $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$ auf $W(f^{-1}) = D(f)$

DIFFERENTIALRECHNUNG

LIMES UND STETIGKEIT

Limes: $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei U eine Umgebung von z_0 ist. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ ist wie folgt definiert: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $|f(z) - a| < \varepsilon$, wenn $0 < |z - z_0| < \delta$. Wichtig: ist f eine Funktion mehrerer Variablen, muss $z \rightarrow z_0$ aus jeder Richtung **Stetigkeit in z_0 :** wenn $f(z_0)$ definiert und $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

Stetigkeit ist auch bei den Randpunkten definiert.

Gleichmässig stetig: wenn stetig und δ unabhängig von z_0 ist.

KOMPLEXE DIFF'BARKEIT

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Differenzierbar in z_0 : falls $f'(z_0)$ aus jeder Richtung existiert. Diff'barkeit ist nur für innere Punkte definiert.

RECHENREGELN

Linearität: $\forall a, b \in \mathbb{C}, (af + bg)' = af' + bg'$???

Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, wobei $g(z) \neq 0$

Kettenregel: $\frac{d}{dz}(f(g(z))) = \frac{df}{d\omega} \Big|_{\omega=g(z)} \frac{dg}{dz}$

Ableitung der Inversen: $\frac{d}{dz}(f^{-1}(z)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$ falls die Funktionen differenzierbar sind und alle definiert sind.

WICHTIGE KOMPLEXE ABLEITUNGEN

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

$$\frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z)$$

$$\frac{d}{dz} \sinh(z) = \cosh(z), \quad \frac{d}{dz} \cosh(z) = \sinh(z)$$

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \text{ für jedes } z \text{ mit } |z| < R = \text{Konvergenzradius.}$$

CAUCHY-RIEMANN-DGLS

f erfüllt C-R-DGLs $\Leftrightarrow f$ analytisch \Leftrightarrow

$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ erfüllt

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

und die partiellen Ableitungen sind stetig.

Wichtiges Kalkül: C-R-DGLs erfüllt $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

C-R-DGLs in Polarkoordinaten: $u_r = \frac{1}{r} v_\theta, v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$

C-R-DGLs gelten nur für komplexe Funktionen!

ANWENDUNG DER C-R-DGLS

Konstantheit 1: f analytisch $\wedge |f(z)| = k \Rightarrow f$ konstant

Konstantheit 2: f analytisch $\wedge f'(z) = 0 \Rightarrow f$ konstant

Tangentenvektor an der Kurve $f \circ \gamma: (f \circ \gamma)'(t) = f'(y(t)) \gamma'(t)$

POTENTIALGLEICHUNG

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

wobei u zweimal diff'bar mit stetiger 2. Ableitung (darf 0 sein).

HARMONISCHE FUNKTIONEN

Harmonische Funktionen: =genügen der Potentialgleichung u harmonisch $\Rightarrow \exists$ harmonisches v , so dass $u + iv$ analytisch $f = u + iv$ analytisch $\Rightarrow u$ und v harmonisch $\Rightarrow v$ **konjugiert harmonisch** zu u

ANALYZITÄT & HOLOMORPHISMUS

In der komplexen Analysis:

analytisch \Leftrightarrow **holomorph** \Leftrightarrow **integrierbar** \Leftrightarrow **diff'bar auf einer Umgebung** \Leftrightarrow **beliebig oft diff'bar auf einer Umgebung** $\Leftrightarrow f^{-1}$ **analytisch** \Leftrightarrow **beliebige Ableitung analytisch** \Leftrightarrow **CR-DGLs erfüllt**

Kompositionen: f, g holomorph

• $f(z) + g(z)$ holom., $f(z)g(z)$ holom.

• Quotient $\frac{p(z)}{q(z)}$ holom., wenn p, q holom. auf \mathbb{C} und $q(z) \neq 0$

• Verkettung $f(g(z))$ holom. auf $\{z | g(z) \in \text{dom}(f)\}$ Evtl. durch Reihenentwicklung zeigen.

Ganzzheit: wenn eine Funktion auf ganz \mathbb{C} analytisch ist.

Diffeomorphismus:

Eine Funktion f ist diffeomorph, wenn sie eine holomorphe Umkehrabbildung besitzt und selbst holomorph ist.

ELEMENTARE ANALYTISCHE FUNKTIONEN

e^z, z^n mit $n \in \mathbb{N}, \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^*, \text{Log}(z)$ auf \mathbb{C}^* , alle Potenzreihen

$$\sqrt{z} \text{ auf } \mathbb{C}^*, \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

NICHT holomorph: $|z|, \Re(z), \Im(z), \bar{z}, \text{Arg}(z)$

ABLEITUNGEN VON KOMPL. FUNKTIONEN

$$f \text{ holom.} \Rightarrow \frac{d}{dz} f(z) = \frac{du(x, y)}{dx} + i \frac{dv(x, y)}{dx} = -i \frac{du(x, y)}{dy} + \frac{dv(x, y)}{dy}$$

INTEGRALRECHNUNG

LINIEN/KURVENINTEGRAL

f stetig diff'bar entlang der param'baren Kurve Γ , dann:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz \rightarrow \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = F(\Gamma_b) - F(\Gamma_a)$$

mit $\gamma: [a, b]$ Parameterdarstellung von Γ mit $\gamma'(t) \neq 0$.

Eigenschaften:

• **Linearität:**

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, f, g \text{ stetig} \rightarrow \int_{\Gamma} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\Gamma} f + \beta \int_{\Gamma} g$$

• **Umkehrung:** $\int_{\Gamma} f(z) dz = -\int_{-\Gamma} f(z) dz$

• **Beschränktheit:**

$$|f(z)| \leq M, \forall z \in \Gamma \rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L(\Gamma),$$

$L(\Gamma)$: Länge von Γ

• **Verkettung:** $\Gamma = \sum_i \Gamma_i, \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_i \int_{\Gamma_i} f(z) dz$

Aus der Definition folgt für **geschlossene Γ** und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\Gamma \text{ geschlossen} \Rightarrow \int_{\Gamma} f(z) dz = F(0) - F(0) = 0$$

SATZ VON CAUCHY (FÜR EINF. ZUSAMH. GEB.)

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ **analytisch** auf einem **einfach zusammenh. Gebiet** (das aber sehr unförmig sein kann).

Gilt auch für reelle Integrale. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$

$$\Gamma \text{ geschlossen} \Rightarrow \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f(z) dz = 0$$

$\Leftrightarrow f$ besitzt **analyt. Stammfunktion:** $F(b) - F(a) = \int_{\Gamma} f(z) dz$

INTEGRALFORMEL VON CAUCHY

Ω ein n -fach zusammenhängendes Gebiet mit Randkomponenten

c_1, c_2, \dots, c_n , die einmal im positiven

Sinn (Gegenuhrzeigersinn) das undefinierte Gebiet umlaufen.

$f: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}, f$ analytisch auf Ω_0 und $\Omega \subset \Omega_0$, dann gilt $\forall z_0 \in \Omega$:

$$2\pi i \cdot f(z_0) = \oint_{c_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \sum_{j=2}^n \oint_{c_j} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$2\pi i \sum_{j=2}^n f_j(z_0, j) = \sum_{j=2}^n \oint_{c_j} \frac{f_j(z)}{z - z_0, j} dz$$

$f(z)$ analytisch, $\frac{f(z)}{z - z_0}$ NICHT analytisch.

Integralformel von Cauchy für Ableitungen: f analytisch

$$\frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z_0) = \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Anwendungen:

• **Mittelwertsatz:**

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, analytisch, Ω Gebiet, $a \in \Omega, p > 0$, so dass

$B(a, p) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < p\} \subset \Omega$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + pe^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, p)} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

• **Maximumprinzip:**

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, Ω Gebiet, $z_0 \in \Omega$, so dass $|f(z_0)| = \max_{z \in \Omega} |f(z)|$ (oder $|f(z_0)| = \min_{z \in \Omega} |f(z)|$) Dann ist f konstant auf Ω .

Bemerkung: Maximumprinzip und Mittelwert sind Eigenschaften von harmonischen Funktionen.

DEFORMATIONSPRINZIP

Können zwei Kurven innerhalb eines Gebietes aufeinander deformiert werden, so hat ihr Integral denselben Wert.

WICHTIGE FUNKTIONEN

ARGUMENT

Hauptwert des Arguments

Arg: $\mathbb{C}^* \rightarrow (-\pi, \pi], z \mapsto \arg(z) \in (-\pi, \pi]$

LOGARITHMUS

$$\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$$

$$\frac{\log(z)}{\log(z)} = \log(z)$$

„Der Logarithmus **bildet eine Zahl** auf ihr Argument ab“

mit oder **ohne Grenzen**???

Hauptzweig des Logarithmus

Log: $\mathbb{C}^* \rightarrow S, z \mapsto \text{Log}(z) := \log(|z|) + i \text{Arg}(z), 0 < \varphi < 2\pi$

Wenn $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Arg}(z) = 0 \Rightarrow$ komplexer $\log =$ reeller \log

Positiver Zweig des Logarithmus:

$$\text{Log}^+(z) = \log(z), \quad 0 < \Im(\text{Log}^+(z)) \leq 2\pi$$

SINC-FUNKTION

$$\text{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

stetig, nicht absolut integabel

EXPONENTIALFUNKTION

$\exp(z)$ ist holomorph

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

$$|\sin(x)| \leq 1$$

$$\sin(z) = \sin(x + iy) = \cos(x) \sin(iy) - \sin(x) \cos(iy) = i \cos(x) \sinh(y) + \sin(x) \cosh(y)$$

Der komplexe **Sinus** und der komplexe **Cosinus** haben beide

nur ihre allgemeine bekannten **Nullstellen**. (alle in \mathbb{R})

Zeigen mit Re- bzw. Im-Anteil von $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \dots$

ALLGEMEINES

DIVERSES

Joukowski-Funktion (Fluid-Dynamik): $f(z) = z + \frac{1}{z}$

LÖSUNGSIDEEN & FEHLERQUELLEN

- Polardarstellung
- Parameterdarstellung
- Evtl. nur Teilgebiete betrachten
- Notfalls Vektorrechnung in \mathbb{R}^2
- Indirekter Beweis?
- Einsetzen kann auch eine Beweismöglichkeit sein
- Quadrieren des Integrals, dann Koordinatentransformation
- K-Integral durch andere K-Integrale und S.v. Cauchy best.
- Abschätzung zur Bestimmung des Integrals:

$$\int f(z) dz \leq \left| \int f(z) dz \right| \leq \int |f(z)| dz$$
- „Heraus schneiden“ von unerwünschten Gebieten (S.v.C.)
- Laurent-Reihen: PBZ, erweitern mit $\frac{z-z_0}{z-z_0}$
- Laurent-Reihen: Entwicklungsstelle beachtet?
- Betrag im Integral \rightarrow Integral aufsplitten
- FT & LT: Multivar-DGLs haben am Schluss beide Variablen!
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Es gilt immer: reelles Integral \rightarrow reelle Lösung
- reelle Integrale von cos mit e^{ix} schreiben und dann Realteil des Integrals nehmen (nur mit Überlegen!)

UNSORTED

Falls $f'(z_0) = 0$ verhält sich f wie z^n auf einer Umgebung von z_0 .
Bei Integralen über den Rand von Kreisingen ist der innere Kreis im Uhrzeigersinn, der äussere Gegenuhrzeigersinn.

UNGLEICHUNG VON CAUCHY

f analytisch

$$|f(z)| \leq M \text{ auf } \partial B(z_0, \rho) \subset \Omega \Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M}{e^n}$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} dz \leq \frac{n!}{2\pi i} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi \rho$$

Satz von LIEUVILLE:

f ganz und $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f = \text{konstant}$
Jede beschränkte, ganze Funktion ist konstant.

Satz von MORERA:

$$\oint f(z) dz = 0 \Rightarrow f \text{ analytisch auf } \Omega$$

TAYLOR

Lemma 3.3.6:

irgendwas zu Taylor
 Ω ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$ und $\rho \in \mathbb{R}, \rho > 0$, s.d. $\partial B(z_0, \rho) \subset \Omega$

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf $\partial B(z_0, \rho)$ und $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

$$\text{Dann ist } g(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, & |z - z_0| < \rho \\ \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n, & |z - z_0| > \rho \end{cases}$$

wobei $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \forall n \in \mathbb{Z}$

Satz 3.3.7 von TAYLOR:

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in \Omega$, s.d. $\partial B(z_0, \rho) \subset \Omega$, dann:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \forall z \in B(z_0, \rho)$$

Die Konvergenz ist auf $B(z_0, R)$, wobei $0 < R < \rho$ gleichmässig.

$$\Rightarrow f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} n(z - z_0)^{n-1} \text{ und } \int f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot \int (z - z_0)^n dz$$

RESIDUENSATZ

LAURENT-ENTWICKLUNGEN

Ab jetzt kann f analytisch auf $\Omega \setminus \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ sein.

KONVERGENZRADIUS

Konvergenzradius: „Abstand zur nächsten Singularität“

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

LAURENT-ENTWICKLUNGEN

f analytisch min. auf einem Kreisring Ω mit z_0 : Zentrum von Ω

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil}}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{in } \Omega \text{ um } z_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Integralberechnung fast NIE nötig. Andere Reihen anpassen, PBZ. Bei jeder Singularität eine Entwicklung auf einem Kreisring innen und einem Kreisring aussen. Innerhalb Konvergenzbereich sind L-R und die Funktion holom.

SINGULARITÄTEN

Ω : Gebiet, $z_0 \in \Omega, f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch

Singularität in z_0 : f ist nicht def. oder nicht holom. in z_0 .

Nicht isolierte Singularitäten: selbsterklärend

Isolierte Singularität: $\exists \varepsilon > 0$, so dass f ohne weitere Sing. auf der Scheibe $B(z_0, \varepsilon)$ analytisch ist.

ISOLIERTE SINGULARITÄTEN

Typenunterscheidung isolierter Singularitäten:

Hebbare Singularität:

Die Funktion ist analytisch fortsetzbar. Kein Hauptteil i.d. L-E Gegenbeweis: limes existiert nicht.

Riemann'sche Hebbarkeit: f holom. auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ und beschränkt auf $B(z_0, \varepsilon) \Rightarrow f$ analytisch fortsetzbar in z_0 .

Pol:

Hauptteil der L-E im Zentrum z_0 hat endlich viele Terme. Die Ordnung ist der „grösste negative“ (eig. kleinste) Exponent. Dazu muss unbedingt die L-E auf einer punktierten Kreisscheibe um z_0 betrachtet werden.

Ist f analytisch und z_0 ein Pol von f , so gilt: $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$

Wesentliche Singularität:

Der Hauptteil der L-E in z_0 hat unendliche viele Terme. f holom., z_0 wesentliche Sing. $\Rightarrow f$ nimmt auf der infinit kleinen Scheibe $B(z_0, \varepsilon)$ um z_0 jeden Wert $\omega \in \mathbb{C}$ bis auf einen unendlich oft an.

Nullstellen in Bezug auf Taylor-Entwicklungen:

Eine Nullstelle n -ter Ordnung, falls

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Falls f eine Nullstelle n -ter Ordnung bei z_0 , so gilt für T-E:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n} = (z - z_0)^n \cdot g(z) \text{ mit } g(z_0) \neq 0$$

Fazit: Eine analytische Funktion kann nur isolierte Nullstellen besitzen.

Satz: Sei f analytisch in z_0 mit $f(z_0) = 0$ und die Nullstelle besitzt Ordnung n . Sei weiter h analytisch mit $h(z_0) \neq 0$, dann haben die Funktionen $\frac{1}{f(z)}$ und $\frac{h(z)}{f(z)}$ bei $z = z_0$ einen Pol der Ordnung n .

Def.: Eine analytische Funktion deren Singularitäten nur Pole sind, wird **meromorph** genannt.

RESIDUENSATZ

RESIDIUM

$$\text{res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{um } z_0} f(z) dz, \quad z_0: \text{Singularität}$$

Berechnungsarten:

Wesentliche Singularität: $\text{res}(f, z_0) = a_{-1}$ der L-E um z_0

einfacher Pol: $\text{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)f(z))$

n -facher Pol: $\text{res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z))$

q hat einf. Nullstelle z_0 : $f = \frac{p}{q} \Rightarrow \text{res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}, p, q$ holo.

allgemein: $\text{res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{um } z_0} f(z) dz$

Die Methode für wesentliche Singularitäten funktioniert immer.

$$\text{res}(f, z_0) = \text{res}(f, \bar{z}_0)$$

Achtung: Bei Nullstellenbestimmung mit $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ist das Originalpolynom $a(x - x_1)(x - x_2)$

RESIDUENSATZ

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, holomorph bis auf isolierte Singularitäten z_0, z_1, \dots
 Ω_0 : Gebiet in Ω mit $\partial \Omega_0 \subset \Omega, \partial \Omega_0$ ohne Singularität

$$\oint_{\partial \Omega_0} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \Omega_0} \text{res}(f, z_i)$$

ANWENDUNGEN AUF REELLE INTEGRALE

Typ 1, gebrochen-rationale, reelle Funktion von sin und cos:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t)) dt = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz = 2\pi \sum_{|z_k| < 1} \text{res}\left(\frac{1}{z} f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right), z_k\right)$$

Typ 2, gebrochen-rationale, reelle Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\Im(z_k) > 0} \text{res}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}, z_k\right)$$

P, Q Polynome $\in \mathbb{R}$,

wobei $\text{Grad}(Q) \geq \text{Grad}(P) + 2$ und $Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Typ 3, Funktionen von sin oder cos mult. mit geb.-rat. Funkt.:

$$P, Q \text{ Polynome } \in \mathbb{R}, \quad Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Grad}(Q) \geq \text{Grad}(P) + 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi \Im \left(\sum_{\Im(z_k) > 0} \text{res}\left(e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right) \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -2\pi \Re \left(\sum_{\Im(z_k) > 0} \text{res}\left(e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right) \right)$$

Typ 4, f mit oder ohne einfachen Polstellen auf \Re -Achse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\Im(z_k) > 0} \text{res}(f, z_k) + \pi i \sum_{z_k \in \mathbb{R}} \text{res}(f, z_k)$$

Ungeprüfte Formel für geb.-rat. F. von cos, sin & exp:

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) e^{int} dt = \sum_{|z_k| < 1} \text{res}(\tilde{R}_n(z), z_k), n \geq 0$$

$$\text{mit } \tilde{R}_n(z) = R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2z}\right) z^{n-1}$$

SPEZIELLE UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Hat ein Integral mehrfache Polstellen auf \Re -Achse, so wählen wir einen Integrationsweg, der einer Halbkreisform in positive Imaginär-Richtung entspricht und bei den Singularitäten jeweils einen kleinen Halbkreis unter der Singularität rum macht (so dass sie eingeschlossen ist/sind. Dann das Integral Gesamtintegral berechnen (Residuensatz) und die Halbkreise manuell berechnen und subtrahieren. **BILD!!!**

KOMISCHE RECHENREGELN

$$\overline{\int_a^b h(t) dt} = \int_a^b \overline{h(t)} dt, \quad \overline{\int(z) \xi(z)} = \int(\bar{z}) \cdot \overline{\xi(z)}$$

NULL- UND POLSTELLENZÄHLENDES INTEGRAL

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{R}(f)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f, \quad f \text{ meromorph; auf } \bar{\mathbb{C}} \text{ ist: } N_f = -P_f$$

$$N_f = \#\text{Nullstellen}, \quad P_f = \#\text{Polstellen inkl. Vielfachheiten}$$

CAUCHY-PRODUKTREGEL

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j$$

FOURIER-REIHEN

$f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$, translationssymmetrisch
 f muss nicht stetig sein

PERIODIZITÄT

$f(x+p) = f(x) \Rightarrow f$ periodisch, p : eine Periode
Fundamentalperiode (FP): kleinste Periode, konst. Funkt.: \exists FP
 Rechenregel: f, g period. $\Rightarrow f+g$ periodisch, $f \cdot g$ periodisch

WICHTIGE PERIODIZITÄTEN

$$A \cos(\omega t + \alpha), A \sin(\omega t + \alpha) \rightarrow FP: 2\pi/\omega$$

$$e^{i\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow FP: 2\pi/\alpha$$

$$e^{i\alpha x}, \alpha \in \mathbb{Z}: 2\pi \text{ eine Periode}$$

TRIGONOMETRISCHE POLYNOME

Trigonometrisches Polynom von Grad $\leq N$:

$$\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt} \text{ oder } \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

Trigonometrische Reihe:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \text{ oder } \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

Die Periode dieser trig. Reihe ist 2π .

Skalarprodukt

Seien f, g zwei 2π periodische Funktionen, so ist das Skalarprodukt von f und g durch so definiert:

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Eigenschaften:

$$\langle f_1 + f_2 | g \rangle = \langle f_1 | g \rangle + \langle f_2 | g \rangle, \quad \langle f | g \rangle = \overline{\langle g | f \rangle}$$

$$\langle \lambda f | g \rangle = \lambda \langle f | g \rangle, \quad \langle f | \lambda g \rangle = \overline{\lambda} \langle f | g \rangle$$

Orthogonalität:

$\langle f | g \rangle = 0, f \neq 0, g \neq 0 \Rightarrow f, g$ orthogonal

Norm:

Die Norm einer 2π -periodischen Funktion ist

$$\|f\|^2 := \langle f | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{f(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

(gleiche Eigenschaften wie Ableitung)

FOURIER-REIHE

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch, so ist folgende ihre Fourier-Reihe:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k x}{T}}, \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right))$$

FOURIER-KOEFFIZIENTEN

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-i \frac{2\pi k x}{T}} dx, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) dx$$

Evtl. komplexe Fourierkoeff. mit Residuensatz berechnen!

f gerade (wie cos): $f(x) = f(-x)$

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) dx$$

f ungerade (wie sin): $f(x) = -f(-x), f(-x) = -f(x)$

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) dx$$

Allgemein gilt für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \overline{c_k} = c_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

UMRECHNUNG

$$c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + i b_{-n}) \text{ mit } n < 0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \text{ mit } n > 0$$

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad a_0 = 2c_0$$

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

GERADE UND UNGERADE FUNKTIONEN

gerade \cdot gerade = gerade, ungerade \cdot ungerade = gerade

gerade \cdot ungerade = ungerade

$\cos(kx)$ = gerade, $\sin(kx)$ = ungerade

\int_{-a}^a gerade F. = $2 \int_0^a$ gerade F., \int_{-a}^a ungerade F. = 0

WICHTIGE IDENTITÄTEN:

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega t)$$

Orthogonalitätsrelationen: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$

$$e_k(x) = e^{ikt} \Rightarrow \langle e_k | e_n \rangle = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = n \\ 0 & \text{wenn } k \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{m,n} = \begin{cases} \pi & \text{wenn } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{m,n} = \begin{cases} \pi & \text{wenn } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Andere spezielle bestimmte Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \pi$$

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^n dx = n! a^{-n-1}, \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi a^{-2n-1}}, \quad a > 0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$$

Vereinfachungen der Exponentialfunktion: $k \in \mathbb{Z}$

$$i^k = e^{i(\frac{k\pi}{2})} = e^{i(\frac{-3k\pi}{2})} = 1, i, -1, -i, 1, \dots$$

$$(-i)^k = e^{i(\frac{-k\pi}{2})} = 1, -i, -1, i, 1, \dots$$

WICHTIGE INTEGRALE FÜR FOURIER

$$\int_{T_1}^{T_2} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = \left[-\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{T_1}^{T_2}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \sin(\omega t) \cos(n\omega t) dt = \left[\frac{\cos(\omega t) \cos(n\omega t) + n \sin(\omega t) \sin(n\omega t)}{\omega(n^2-1)} \right]_{T_1}^{T_2}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \sin(\omega t) \sin(\omega t) dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{T_1}^{T_2}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \sin(\omega t) \sin(n\omega t) dt = \left[\frac{\cos(\omega t) \sin(n\omega t) - n \sin(\omega t) \cos(n\omega t)}{\omega(n^2-1)} \right]_{T_1}^{T_2}$$

UNSTETIGKEITEN

Sei f eine 2π -periodische Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$
 f stückweise stetig und es existieren eine rechte und linke
 (nicht zwingend gleiche) Ableitung in jedem Punkt in $[-\pi, \pi]$,
 dann ist die Fourier-Reihen-Entwicklung von f auf $[-\pi, \pi]$
 konvergent.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \begin{cases} f(x), & \text{wobei } f \text{ stetig} \\ \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)}{2}, & \text{Sprung } x_0 \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Bemerkung: Falls $f \in C^2, f''$ stetig \Rightarrow **Konvergenz** der Fourier-Reihe von f ist **gleichmässig**.

Bem.: Die Konvergenz einer Fourier-Reihe ist normalerweise nicht gut.

GIBBS PHÄNOMEN

Das Überschneiden der Fourier-Reihe bei einfachen Sprungstellen (ca. 18% der Höhe).

Sei $s_n := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ die n -te partielle Summe von f .
 Die Konvergenz ist nicht punktweise wegen des Gibbs Phänomens.

Satz: Sei f eine Funktion die durch ihre Fourier-Reihen-Entwicklung dargestellt wird. Dann ist:

$$1. \|f - s_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$2. \|f - p_n\| \geq \|f - s_n\| \quad \forall p_n: \text{trigonom. Polynom}$$

$$2\pi \|f - p_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 - 4\pi \Re \left(\sum_{k=-n}^n c_k \overline{p_k} \right) + 2\pi \sum_{k=-n}^n |p_k|^2$$

Bemerkung:

f analytisch auf $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : e^{-\alpha} < |z| < e^{\alpha}\}, \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

FOURIER \Leftrightarrow LAURENT-REIHE

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-ikt} dt$$

Sei $f^{\sim}(t) := f(e^{it}), f^{\sim}: 2\pi$ -periodisch

und $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{\sim}(t) e^{ikt} dt$

$$f^{\sim}(t) = f(e^{iz}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

Fazit: die Laurent-Reihen-Entwicklung einer analytischen Funktion f auf einer Umgebung von ∂D ist die Fourier-Reihen-Entwicklung der 2π -periodischen Funktion $f^{\sim}(t) = f(e^{it})$.

Anders formuliert:

Substituiert man $z = e^{ix}$ in einer Fourier-Reihe, erhält man die Laurent-Reihe von z mit ∂D im Konvergenzgebiet:

$$f(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a_k, b_k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_{-k} = \overline{c_k}$$

FOURIER-TRANSFORMATION

GRUNDWISSEN

ABSOLUTE INTEGRABILITÄT

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist **absolut integabel**, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| < \infty$$

Fall 1: $|f(x)| \leq M$ und Träger(f) kompakt $\Rightarrow f$ abs. int.

$\int |f(x)| dx \leq M \cdot \text{Länge}(\text{Träger}(f)) < \infty$

Fall 2: Träger(f) unbeschränkt $\Rightarrow f$ abs. int., wenn f schnell genug $|x| \rightarrow \infty$ verschwindet. (exp ist z.B. schnell genug)

TRÄGER

Der Träger einer Funktion f ist der kleinste geschlossene Menge wobei die Funktion ungleich 0 ist.

Träger (en: support): $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{supp}(f) := \{x \in A, f(x) \neq 0\} \text{ (abgeschl.)}$$

$$\text{Bsp1: } f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-a, a] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \rightarrow \text{Träger}(f) = [-a, a]$$

$$\text{Bsp2: } f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-a, a) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \rightarrow \text{Träger}(f) = [-a, a]$$

FOURIER-TRANSFORMATION

HERLEITUNG

Fourier-Reihe mit unendlicher Periode.

Möchten Fourier-Transformation $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f_L(t) = \begin{cases} f, & t \in [-L, L] \\ f(t + 2nL), & (2n-1)L < |t| < (2n+1)L \end{cases}$$

Wenn $L \rightarrow \infty \Rightarrow f_L(t) \rightarrow f(t)$

Idee: Betrachtung als Riemannsumme.

$$\text{Frequenz: } \omega_0 = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}, \quad \omega_k = k\omega_0 = \frac{k\pi}{L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \omega$$

$$\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi}{L} \rightarrow 0$$

$$f_L(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \left(\int_{-L}^L f(\xi) e^{-ik\omega_k \xi} d\xi \right) e^{ik\omega_k t} = \dots$$

Falls $L \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta\omega_k \rightarrow 0$, dann:

$$\int_{-L}^L f(z) e^{-i\omega_k \xi} d\xi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega_k \xi} d\xi$$

Falls $L \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$f(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \right) e^{i\omega t} d\omega$$

TRANSFORMATION

Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, **absolut integabel**, ist die FT von f :

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

RÜCKTRANSFORMATION

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, **absolut integabel**, stetig und \hat{f} **absolut integabel**, dann gilt:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Unstetigkeiten: Falls f in t_0 nicht stetig ist, ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right]$$

Sei $\omega \mapsto e_{\omega}(t) := e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) e_{\omega}$$

Die FT zerlegt f als ein Integral schwingender Funktionen und zeigt, welche Frequenzen in f anwesend sind.

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega)$ ist die Amplitude der schwingenden Komponenten e_{ω} von f . (vgl. Fourierreihen)

ENERGIE

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\hat{f}(\omega)|$ ist die **Energie** des Teiles e_{ω} .

Satz von Parseval-Plancherel:

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ abs. integrierbar, \hat{f}, \hat{g} abs. int., $|f|^2, |g|^2$ abs. int.

$$\langle f|g \rangle = \langle \hat{f}|\hat{g} \rangle, \quad \text{und } \|f\| = \|\hat{f}\|$$

Konsequenz: Die **Gesamtenergie** der Funktion f ist:

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Satz von Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

SKALARPRODUKT & NORM

Skalarprodukt:

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f|g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

Normen:

Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, bezeichnen wir:

$$L_1\text{-Norm} \quad \|f\|_{L_1} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

$$L_2\text{-Norm (normale Norm)} \quad \|f\|_{L_2} = \langle f|f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

$$L_{\infty}\text{-Norm} \quad \|f\|_{L_{\infty}} := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$$

$$\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}, \quad \|f * g\|_{L_{\infty}} \leq \|f\|_{L_{\infty}} \cdot \|g\|_{L_{\infty}}$$

RECHENREGELN

	Zeitbereich	unitäre FT in ω
Linearität	$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)$
Zeit-Shift	$f(x - a)$	$e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$
Freq-Shift	$e^{iax} f(x)$	$\hat{f}(\omega - a)$
Zeit-Skal.	$f(ax)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
	$f\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0$	$a \hat{f}(a\omega)$
Freq-Skal.	$\hat{f}(\omega)$	$f\left(-\frac{\omega}{a}\right)$
Zeit-Diff.	$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$	$(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$
Freq-Diff.	$x^n f(x)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega)$
Zeit-Konv.	$(f * g)(x)$	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$
Freq-Konv	$f(x)g(x) =$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}(\omega)$

	Zeitbereich	unitäre FT in ω
Herm.sym.	Bilber. v. $f(x)$ reell	$\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$
	gerade, Bildb. reell	$\hat{f}(\omega)$ reell, gerade
	unger., Bildb. reell	$\hat{f}(\omega)$ imag., unger.

TABELLE

Quadrat-integriable Funktionen:

Zeitbereich	unitäre FT in ω
$\text{rect}(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$\text{sinc}(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$\text{sinc}^2(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \text{tri}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$e^{-ax} u(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + i\omega)}$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}$

Verteilungen:

Zeitbereich	unitäre FT in ω
1	$\sqrt{2\pi} \delta(\omega)$
$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
e^{iax}	$\sqrt{2\pi} \delta(\omega - a)$
$\cos(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a))$
$\sin(ax)$	$\frac{2}{i\sqrt{2\pi}} (\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a))$
$\cos(ax^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
$\sin(ax^2)$	$\frac{-1}{\sqrt{2a}} \sin\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
x^n	$i^n \sqrt{2\pi} \delta^{(n)}(\omega)$
$\frac{1}{x}$	$-i\sqrt{\pi/2} \text{sgn}(\omega)$
$1/x^n$	$-i\sqrt{\pi/2} \frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \text{sgn}(\omega)$
$ x ^\alpha$	$\frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\pi\alpha/2) \Gamma(\alpha + 1)}{ \omega ^{\alpha+1}}$
$\text{sgn}(x)$	$\sqrt{2/\pi} \frac{1}{i\omega}$
$u(x)$	$\sqrt{\pi/2} \left(\frac{1}{i\pi\omega} + \delta(\omega) \right)$

Rechteckfunktion:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } |x| > 1/2 \\ 1/2, & \text{wenn } |x| = 1/2 \\ 1, & \text{wenn } |x| < 1/2 \end{cases}$$

Dreiecksfunktion:

$$\text{tri}(x) = \max(1 - |x|, 0) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Allgemeines Lösen von DGLs: siehe Laplace-Transformation

Beispiel Multivariablen PDEs:

$$u_t = au_{xx}, \quad t \geq 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad u(x, 0) = f(x), x \in \mathbb{R}$$

$U(\omega, t) = \mathcal{F}[u(\cdot, t)](\omega)$ (Fourier-Trafo der x -Komponente)

$U_t(\omega, t) = -a\omega^2 U(\omega, t), \quad U(\omega, 0) = \mathcal{F}[f](\omega)$

$U(\omega, t) = F(\omega) e^{-a\omega^2 t}$

FALTUNG

Faltung zweier T-periodischer Funktionen:

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, beide T -period., stetig $\rightarrow f * g$ ist T -periodisch

$$(f * g)(t) := \int_a^{a+T} f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Faltung nicht-periodisch: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, stetig

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - s) g(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(t - s) ds$$

f integrierbar, falls $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ resp. $\sup_{T>0} \int_{-T}^T |f(t)| dt < \infty$ existiert.

Analogie der Faltung periodischer Funkt. zu Fourier-Reihen:

Seien $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t}, \omega = \frac{2\pi}{T}$
dann ist $(f * g)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{in\omega t}$.

RECHENREGELN FALTUNG

Identität	$f(t) * \delta(t) = f(t)$ $f(t) * k\delta(t) = kf(t)$ $f(t) * \delta(t + k) = f(t + k)$
Assoziativität	$f * (g * h) = (f * g) * h$
Assoziativität mit Skalaren	$a(f * g) = (af) * g = f * (ag), \quad a \in \mathbb{C}$
Distributivität	$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
Kommutativität	$f * g = g * f$
Konjugation	$\overline{f * g} = \overline{f} * \overline{g}$
Ableitung	$\frac{d}{dx} (f * g) = \frac{df}{dx} * g = f * \frac{dg}{dx}$
Integration	$\int (f * g)(x) dx = \int f(x) dx * \int g(x) dx$
evau*evau=evau	$f(x) \equiv 0 \forall x \leq 0, g(x) \equiv 0 \forall x \leq 0$ $\Rightarrow (f * g)(x) \equiv 0 \forall x \leq 0$
	$f * g$ ist mindestens so „schön“ (z.B. stetig, diff'bar, ...) wie die „schönere“ der beiden Funktionen f und g .
	Mit Hilfe der Faltung werden Funktionen immer glatter und deren Träger immer grösser.

FALTUNG \Leftrightarrow LAURENT-REIHE

$$\left(\sum_{L\text{-E von } f(z)} a_n z^n \right) * \left(\sum_{L\text{-E von } g(z)} b_n z^n \right) = \sum_{L\text{-E von } f * g} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

EVAU

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f(x) \equiv 0 \forall x \leq 0$ wird Einschwingvorgang (Evalu) genannt.

Eigentliches Integral bei Faltung von zwei Evaus:

$$\text{Seien } f, g \text{ evau} \Rightarrow f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy$$

$$\stackrel{f \text{ evau}}{\Leftrightarrow} \int_0^{\infty} f(y) g(x - y) dy \stackrel{g \text{ evau}}{\Leftrightarrow} \int_0^x f(y) g(x - y) dy$$

$$\Rightarrow (f, g \text{ evau}) \Rightarrow (f * g)(x) \text{ eigentliches Integral}$$

FALTUNGSBEISPIELE

Bsp zu 6: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\chi_{[0,1]} * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(y) f(x - y) dy$$

$$= \int_0^1 f(x - y) dy = \int_{x-1}^x f(t) dt$$

Sei $f = \chi_{[0,1]}$ (unstetig)

$$\chi_{[0,1]} * f = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} = \int_{x-1}^x \chi_{[0,1]}(t) dt$$

$$= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 2 - x, & x \in [1,2] \\ 0, & x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{stetig})$$

ALLGEMEINES UNSORTIERTES

Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Summenvereinf.: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n + c_{-n}$

Ist c_0 nicht aus Formel berechenbar, versuchen separat zu berechnen!

UNSORTED FOURIER-TRANSFORMATION

$$|e^z| = e^{\Re(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a\omega^2 + b\omega + c)} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{(b^2/4a - c)}, \quad \forall a > 0, b, c \in \mathbb{R}$$

Die Fouriertransformation ist bijektiv, d.h.:

$$\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(b) \Leftrightarrow a = b$$

Nachtrag Singularitäten:

$$\frac{f(z)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \dots \xrightarrow{\text{B.d.H.}} \begin{cases} \text{konst.} \rightarrow \text{hebbar} \\ \infty \rightarrow \text{Pol} \end{cases}$$

Aufpassen bei $\sin(z), \cos(z), e^z$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{k^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-k|a|}}{k}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

- Cauchy-Riemann-DGLen
- Kurvenintegrale von Hand berechnen
- Standard-Parametrisierungen von "handelsüblichen" Kurven (Kreisabschnitte, Geraden, etc.)
- Cauchyscher Integralsatz und Folgerungen
- Cauchysche Integralformel und Folgerungen
- Laurentreihen
- Residuensatz und Folgerungen
- Reelle Integrale mittels Residuensatz berechnen
- Laplace-/Fouriertrafo eines Anfangswertproblems

LAPLACE-TRANSFORMATION

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_{[0, \infty)} e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}\{t^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}}, \text{ wobei } \Re(s) > a$$

Voraussetzung: $f(t) = 0, \forall t \leq 0$

	Zeitbereich	Laplace-Bereich
Linearität	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
Freq. Abl.	$tf(t)$	$-F'(s)$
Freq. Abl.	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
Ableitung	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
2. Abl.	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
Allg. Abl.	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Freq. Int.	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$
Integr.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$ $= (u * f)(t)$	$\frac{1}{s} F(s)$
Skalieru.	$f(at), a \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Freq-Shift	$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
Zeit-Shift	$f(t - a)u(t - a)$	$e^{-as} F(s)$
Konvol., Faltung	$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s)G(s)$
Period. F.	$f(t), \text{ periodisch}$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$

Anfangswertsatz: $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
 Schlusswertsatz: $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, wenn alle Pole links.

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Konvergenz
1	$\delta(t - \tau)$	$e^{-s\tau}$	
1a	$\delta(t)$	1	$\forall s$
2	$\frac{(t - \tau)^n}{n!} e^{-\alpha(t - \tau)} u(t - \tau)$	$\frac{e^{-s\tau}}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$\Re(s) > -\alpha$
2a	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re(s) > 0$ ($n \geq 0$)
2a1	$\frac{t^q}{\Gamma(q + 1)} u(t)$	$\frac{1}{s^{q+1}}$	$\Re(s) > 0$ ($\Re(q) \geq 0$)
2a2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re(s) > 0$
2b	$u(t - \tau)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$	$\Re(s) > 0$
2c	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re(s) > 0$
2d	$t^n e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$\Re(s) > -\alpha$
2d1	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\Re(s) > -\alpha$
3	$(1 - e^{-\alpha t})u(t)$	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$	$\Re(s) > 0$
4	$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\Re(s) > 0$
5	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\Re(s) > 0$

6	$\sinh(\alpha t) u(t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$	$\Re(s) > \alpha $
7	$\cosh(\alpha t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	$\Re(s) > \alpha $
8	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\Re(s) > -\alpha$
9	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\Re(s) > -\alpha$
10	$\sqrt[n]{t} u(t)$	$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{s^{-\left(n+1\right)/n}}$	$\Re(s) > 0$
11	$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) u(t)$	$-\frac{t_0}{s} [\ln(t_0 s) + \gamma]$	$\Re(s) > 0$
	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	
	$(1 + at)e^{at}$	$\frac{s}{(s - a)^2}$	
	$e^{-at}(\cos(\omega t) + \left(\frac{b-a}{\omega}\right) \sin(\omega t)) u(t)$	$\frac{s + b}{(s + a)^2 + \omega^2}$	
	$\frac{as_1 + b}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{as_2 + b}{s_2 - s_1} e^{s_2 t}$	$\frac{as + b}{(s - s_1)(s - s_2)}$	konv. ??? $s_1 \neq s_2$ $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$
	$\frac{t}{2\omega} \sin(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	
	$\cos^2(\omega t)$	$\frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$	
	$\sin^2(\omega t)$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$	
	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1)$	$\frac{1}{s^2(s - a)}$	
	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos(at))$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	

Heaviside-Step-Funktion:
 $u(t) = H(t) = \sigma(t) = h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad h'(t) = \delta(t)$

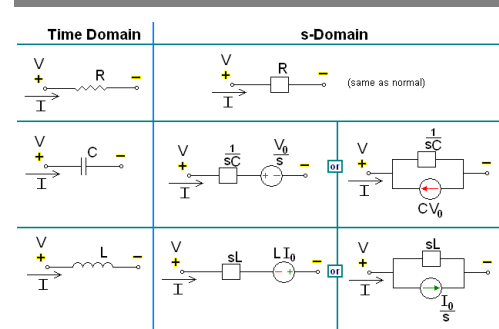
Dirac-Delta-Funktion:
 $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

Gamma-Funktion:
 $\Gamma(z) = "(z - 1)!" = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re(z) \geq 1$

Euler-Mascheroni-Konstante:
 $\gamma = \text{Diff. zw. harm. Reihe und } \ln(x) \approx 0.57721$

Bildraum: Menge aller Laplacetransformationen

ANWENDUNGEN



GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

1. Komplette DGL in Laplace-Bereich transformieren
 2. Nach $F(s)$ auflösen (u.U. Binomialformel verwenden)
 3. Rücktransformieren (u.U. PBZ, Konvolution verw.)
- Systeme von DGLs:**
 Mit Cramer'scher Regel oder Gauss in Laplace-Raum auflösen.

INTEGRALFUNKTIONEN

Beispiel: Gesucht f :

$$f(t) = t + \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = t + (f * \sin)(t)$$

zur Lösung:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[\sin](s) = \frac{1}{s^2} + F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{s^2 + 1}{s^4}$$

Rücktransformieren:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{6} \frac{d^3}{ds^3} \left(\frac{1}{s}\right) = \mathcal{L}[t] + \frac{1}{6} \mathcal{L}[t^3]$$

LAPLACE-TRANSFORMATION

ORIGINALFUNKTION

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückw. stetig mit

1. $f(t) = 0, \forall t < 0$
2. $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}, \forall t \geq 0$, wobei $\sigma, M \in \mathbb{R}$, konstant.

Dann heisst f **Originalfunktion**. Die Menge aller Originalfunktionen heisst **Originalraum** der Laplace-Transformation.

Bemerkung:

1. Falls $f(t < 0) \neq 0$: $\tilde{f}(t) = H(t)f(t)$ ist Originalfunktion.
2. Für $\sigma' > \sigma \Rightarrow e^{\sigma' t} < e^{\sigma t}$. Falls $|f(t)| < M e^{\sigma t} \Rightarrow |f(t)| < M e^{\sigma' t}$. σ_0 so dass $|f(t)| < M e^{\sigma t} \forall \sigma > \sigma_0$, heisst **Wachstumskoeffizient** von f . Anm.: $\Rightarrow |f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$.

Beispiele:

1. $\sigma_0(H) = 0$
2. $f(t) = \begin{cases} t^n, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Beh.: f ist Originalfunktion

Bew.: $e^{\sigma t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma t)^k}{k!} \geq \frac{\sigma^n t^n}{n!} \forall t \geq 0$
 $\Rightarrow t^n \leq M e^{\sigma t} \forall t \geq 0$, mit $M = \frac{n!}{\sigma^n}, \sigma_0 = \inf\{\sigma: t^n < M e^{\sigma t}\} = 0$

3. $f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{C}, f$ ist Originalfunktion mit $M = 1$ und $\sigma_0 = \Re(\alpha), |f| = |e^{\alpha t}| = e^{\Re(\alpha t)} \cdot |1|$

EINDEUTIGKEITSSATZ

Seien f_1, f_2 Originalfunktionen mit Wachstumskoeff. σ_1, σ_2 ; $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$, und $\mathcal{L}[f_1](s) = \mathcal{L}[f_2](s)$, dann $f_1(t) = f_2(t) \forall t$, wo f_1, f_2 stetig.

TRANSFORMATION

Sei f Originalfunktion mit (M, σ_0) .

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad \Re(s) > \sigma_0, \quad s \in \mathbb{C}$$

Lemma: Sei f Originalfunktion mit (M, σ_0) . Dann gilt:

1. $s \rightarrow \infty \Rightarrow \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ existiert $\forall s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > \sigma_0$.
2. $\lim_{\Re(s) \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}[f](s)$ ist **analytisch** in s .

Bemerkung:

1. Laplace-Trafo funktioniert für eine grössere Klasse von Funktionen, insbesondere exponentiell, lineare wachsende.
2. $\mathcal{L}[f], \tilde{f}$ sind **Integraltransformationen**. D.h. sie benötigen **globale** Daten der Funktion f . Approximationen wie Laurent oder Taylor sind **lokal**. Alle diese sind eigentlich Basis-Transformationen.

RÜCKTRANSFORMATION OHNE TABELLE

f Originalfunktion, $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ auf $\Re(s) > \sigma_0, \sigma_0$ Wachstumskoeff. von f .
 Wir hatten gesehen:

1. f analytisch auf $\{s: \Re(s) > \sigma_0\}$
2. $\lim_{\Re(s) \rightarrow \infty} F(s) = 0$
3. $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$

betrachte $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mapsto F\left(\sigma_1 + i\omega\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma_1 + i\omega)t} dt$$

$$\Rightarrow g(\omega) = \int_{\sigma_0}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} e^{-\sigma_1 t} dt$$

Sei $G(t) := f(t) e^{-\sigma_1 t}$, dann ist $g(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{G}(\omega)$

$$\Rightarrow f(t) e^{-\sigma_1 t} = G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma_1 + i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

f stetig in t

$$\Rightarrow f(t) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma_1 + i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$f(t)$ nicht stetig in t_0 : $f \dots = \frac{1}{2} (\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t))$

RÜCKTRANSFORMATION NACH MELLIN

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) ds$$

Dabei wird entlang der Vertikalen $\Re(s) = \gamma$ integriert, wobei γ grösser sein muss als der Realteil aller Singularitäten von $F(s)$. Dadurch ist gewährleistet, dass das Linienintegral im Konvergenzbereich liegt.

Spezialfall: Realteil aller Singularitäten kleiner 0. Dann kann $\gamma = 0$ gesetzt werden und die Rücktrafo entspricht der Fourier-Rücktrafo.

SPEZIELLE INTEGRALE

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-i\omega x} dx \text{ existiert nicht}$$

$$\int t^n e^{-st} dt = -e^{-st} \left(\frac{t^n e^{-st}}{s} + \frac{nt^{n-1} e^{-st}}{s^2} \dots \frac{nt e^{-st}}{s^{n-1}} + \frac{ne^{-st}}{s^n} \right)$$

$$\int t^n \cos(kt) dt = \frac{t^n \sin(kt)}{k} + \frac{nt^{n-1} \cos(kt)}{k^2} - \sin - \cos \dots \pm$$

$$\frac{nt}{k^{n-1}} \sin(kt) \pm \frac{n!}{k^n} \cos(kt), \text{ Vorzeichen: } ++ -- + -- \dots$$

$$\int t^n \sin(kt) dt = -\frac{t^n \cos(kt)}{k} + \frac{nt^{n-1} \sin(kt)}{k^2} + \cos - \sin \dots \pm$$

$$\frac{nt \cos(kt)}{k^{n-1}} \pm \frac{n! \sin(kt)}{k^n}, \text{ Vorzeichen: } - + - + - \dots$$