FELDER & KOMPONENTEN II

Zusammenfassung zur Vorlesung von
Dr. P. Leuchtmann

Lukas Cavigelli, Juni 2011
lukasc@ee.ethz.ch

ALLGEMEINES

Neper: [Np]
- bei Spannungen: $x[Np] = \ln(U_1/U_2)$
- bei Leistungen: $x[Np] = \frac{1}{2}\ln(P_1/P_2)$

MATHEMATISCHES

Vektoridentitäten:

$$rot\ rot\ \vec{A} = grad\ div\ \vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Koordinatensysteme & Infinitesimalelemente:
in (Leuchtmann, 2005) auf Seite 536ff
Rechtssystem:
Rechte Hand: Daumen $\vec{e}_x$, Zeigefinger $\vec{e}_y$, Mittelfinger $\vec{e}_z$
Ausbreitung in $\vec{e}_z$, E-Feld in , H-Feld in
Laplace-Operator:

$$\Delta\vec{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}$$

Reihen:
- binom. Entw.: $(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots,\ |x| < 1$
- geom. Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z},\ |z| < 1$

EBENE WELLEN

Für ebene Wellen gilt **allgemein**:

$$\underline{\vec{H}}_0 = \frac{1}{\omega\mu}(\vec{k} \times \underline{\vec{E}}_0), \qquad \underline{\vec{E}}_0 \cdot \vec{k} = \underline{0}, \qquad \vec{k}\cdot\vec{k} = \omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma$$

$$\vec{E}(t) = \Re\left(\underline{\vec{E}}_0 e^{j\omega t}\right) = \Re\left(\underline{\vec{E}}_0\right)\cos(\omega t) - \Im\left(\underline{\vec{E}}_0\right)\sin(\omega t)$$

Für ebene Wellen **nach $\vec{e}_z$** gilt: $E_z = 0, H_z = 0, \frac{\partial}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial y} = 0$

Unterschied zu TEM-Wellen: dort können Ableitungen $\neq 0$ sein.

EBENE WELLEN IM FREQUENZBEREICH

Alles wird mit Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_z$ betrachtet.

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_x^+ = \vec{e}_{pol}\underline{E}_0^+ e^{-jkz} = \underline{E}_0^+ e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}, \qquad \underline{H}_y^\pm = \pm\frac{\underline{E}_x^\pm}{Z_w}$$

$$\vec{E} = \Re\left\{\underline{\vec{E}}e^{j\omega t}\right\} = \underline{E}_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$$

Wellenzahl:

$$k = -j\gamma = \beta - j\alpha = \sqrt{-j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \omega\sqrt{{}^c\varepsilon\,\mu}$$

Dämpfungskonstante: $[\alpha] = \frac{Np}{m}$

$$\alpha = -\Im(k) = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \geq 0$$

Phasenkonstante: $[\beta] = \frac{rad}{m}$

$$\beta = \Re(k) = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} > 0$$

Phasengeschwindigkeit: (= Ausbreitungsgeschwindigkeit)

$$v_{phase} = \lambda f = \frac{\omega}{\beta} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c_0}{f}\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\quad [m]$

Komplexe Permittivität: ${}^c\varepsilon = \varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) = \varepsilon' + j\varepsilon''$

somit ist dann $rot\ \underline{\vec{H}} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\underline{\vec{E}} = j\omega\,{}^c\varepsilon\underline{\vec{E}}$

Wellenimpedanz: $[Z_w] = \Omega$

$$Z_w = \frac{\underline{E}_0^+}{\underline{H}_0^+} = \frac{-\underline{E}_0^-}{\underline{H}_0^-} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{{}^c\varepsilon}} = |Z_w|e^{j\theta_{Z_w}} = \sqrt{\frac{\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{E}}}{\underline{\vec{H}}\cdot\underline{\vec{H}}}} \neq \frac{\underline{E}}{\underline{H}}$$

Dabei gilt: $0 \leq \theta_{Z_w} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \leq 45° = \frac{\pi}{2}$

STRÖME IM VERLUSTFALL

$$rot\ \underline{\vec{H}} = \underbrace{\sigma\underline{\vec{E}}}_{\underline{\vec{J}}_c} + \underbrace{j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}}_{\underline{\vec{J}}_d} = \underbrace{\underline{\vec{J}}_c}_{\text{conduction}} + \underbrace{\underline{\vec{J}}_d}_{\text{displacement}} = \underline{\vec{J}}_{tot}$$

Daraus folgt der Winkel: $\tan(\theta) = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \left|\underline{\vec{J}}_c\right| / \left|\underline{\vec{J}}_d\right| = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$

Gute Dielektrika: $\sigma \ll \omega\varepsilon \Leftrightarrow \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\vec{J}}_c \ll \underline{\vec{J}}_d$

Gute Leiter: $\sigma \gg \omega\varepsilon \Leftrightarrow \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1 \Leftrightarrow \underline{\vec{J}}_c \gg \underline{\vec{J}}_d$

SKINEFFEKT

Skintiefe: $\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$, weil dann $E_0 e^{-\alpha\delta} = E_0 e^{-1}$

Eindringtiefe der Welle bei der Amplitude auf $1/e$ abgeklungen

Somit folgt für gute Leiter: $Z_w \approx \frac{1}{\sigma\delta}\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\sigma\delta}$

Als E-Feld ergibt sich: $E_x = E_0^+ e^{-z/\delta}\cos(\omega t - z/\delta)$

Zusammenhang zum **Widerstand einer Leitung**:

$R_{DC} = \frac{l}{\sigma S},\ S = l \cdot w$

$R_S = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\pi f\mu/\sigma}\quad [\Omega]$

$R_{AC} = \frac{l}{\sigma\delta w} = \frac{R_S \cdot l}{w}\quad [\Omega]$

Überlegung: stromdurchflossene Fläche für AC: $S = \delta \cdot w$

POLARISATION

Polarisation: x-polarisiert $\Leftrightarrow \vec{E} = E_x(t,z)\vec{e}_z$

Für die ebene Welle im Zeitbereich heisst das, es bleiben:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} \text{und} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2},\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Gegeben sei ein E-Feld mit entsprechendem H-Feld:

$$\vec{E} = E_{01}^+\cos(\omega t - \beta z)\,\vec{e}_x + E_{02}^+\cos(\omega t - \beta z + \phi)\,\vec{e}_y$$

- **lineare Polarisation**: $\phi = 0$ mit Winkel $\tan^{-1}(E_{01}^+/E_{02}^+)$
  $\Re\left(\underline{\vec{E}}_0\right) \parallel \Im\left(\underline{\vec{E}}_0\right) \Leftrightarrow \Re\left(\underline{\vec{E}}_0\right) \times \Im\left(\underline{\vec{E}}_0\right) = 0$
- **zirkulare Pol.** (re-drehend): $\phi = -90°,\ E_{01}^+ = E_{02}^+$
  $\Re\left(\underline{\vec{E}}_0\right) \perp \Im\left(\underline{\vec{E}}_0\right)$ und $\left|\Re\left(\underline{\vec{E}}_0\right)\right| = \left|\Im\left(\underline{\vec{E}}_0\right)\right|$
- **elliptische Pol.** (re-drehend): $\phi \neq 0°,\ E_{01}^+ \neq E_{02}^+$, also sonst

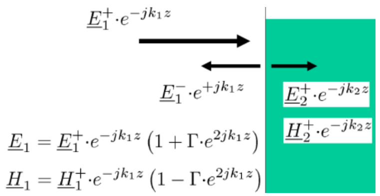
POINTING-VEKTOR

Leistungsfluss: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

Zeitl. durchschnittlicher Leistungsfluss: $\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\Re\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\}$

REFLEXION & TRANSMISSION

SENKRECHTER EINFALL, EBENE WELLE



Reflexionsfaktor:

$$\Gamma = \frac{\underline{E}_1^-}{\underline{E}_1^+} = \frac{Z_{w2} - Z_{w1}}{Z_{w2} + Z_{w1}}$$

Transmissionsfaktor:

$$T = \frac{\underline{E}_2^+}{\underline{E}_1^+} = \frac{2Z_{w2}}{Z_{w2} + Z_{w1}}$$

Allgemeine Relationen:

$$T = 1 + \Gamma, \qquad 0 \leq |\Gamma| \leq 1, \qquad 0 \leq |T| \leq 2$$

Daraus folgt:

$$\underline{E}_1^- = \Gamma\underline{E}_1^+, \qquad \underline{H}_1^- = -\Gamma\underline{H}_1^+, \qquad \underline{E}_1 = \underline{E}_1^+(1 + \Gamma)$$

$$\underline{E}_2^+ = T\underline{E}_1^+, \qquad \underline{H}_2^+ = T\frac{Z_{w1}}{Z_{w2}}\underline{H}_1^+$$

Mittelwert des Poynting-Vektors:

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\Re\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\} = \frac{1}{2}\Re\{\underline{E}_x \cdot \underline{H}_y^*\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left|\underline{E}_1^+\right|^2}{Z_{w1}}(1 - |\Gamma(0)|^2)\vec{e}_z \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Verlustlose Medien:

$$\phi_1 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0, k_1 = \beta_1, k_2 = \beta_2, \qquad Z_{w1}, Z_{w2}, \Gamma, T \in \mathbb{R}$$

VOLLSTÄNDIGE REFLEXION, ⊥ EINFALL

Leerlauf $Z_{w2} \to \infty$:

$$\Gamma = +1, \qquad \underline{E}_1 = 2\underline{E}_1^+, \qquad \underline{H}_1 = \underline{0}$$

Idealer Leiter $\sigma \to \infty$ oder **Kurzschluss** $Z_{w2} = 0$:

$$\sigma \to \infty \Leftrightarrow Z_{w2} = 0, \qquad \Gamma = -1, \qquad \underline{E}_1 = \underline{0}, \qquad \underline{H}_1 = \frac{2\underline{E}_1^+}{Z_{w1}}$$

In diesen Fällen ist der mittlere Leistungstransport 0.

EIGENSCHAFTEN DER STEHENDEN WELLE

Feldminima für $0 \geq \Gamma \geq -1$, also $Z_{w1} > Z_{w2}$,
bzw. *Feldmaxima* für $0 \leq \Gamma \leq 1$, also $Z_{w1} < Z_{w2}$:

$$\beta_1 z = -n\pi, \qquad z_{min} = -n\frac{\lambda_1}{2}, \qquad n = 0,1,\ldots$$

Feldmaxima für $0 \geq \Gamma \geq -1$, also $Z_{w1} > Z_{w2}$,
bzw. *Feldminima* für $0 \leq \Gamma \leq 1$, also $Z_{w1} < Z_{w2}$:

$$2\beta_1 z = -(2n+1)\pi, \qquad z_{max} = -(2n+1)\frac{\lambda_1}{4}, \qquad n = 0,1,..$$

Voltage-Standing-Wave-Ratio: $1 \leq SWR \leq \infty$

$$SWR = \frac{\left|\underline{E}_{x1}\right|_{max}}{\left|\underline{E}_{x1}\right|_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}, \qquad |\Gamma| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$$

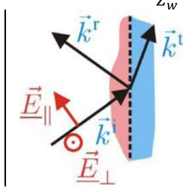
und in Dezibel: $SWR_{dB} = 20\log_{10}(SWR)$, $SWR = 10^{SWR_{dB}/20}$

SCHRÄGER EINFALL

Schräge Ausbreitungsrichtung:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{e}_E = \underline{E}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}\vec{e}_E, \qquad \underline{\vec{H}} = \frac{\vec{e}_n \times \underline{\vec{E}}}{Z_w}$$

Einfallsebene:
Ebene aus Flächennormale und Wellenvektor (Blattebene)
Parallele Polarisation:
$\vec{E}$-Feld parallel zur Einfallsebene
Senkrechte Polarisation:
$\vec{E}$-Feld senkrecht zur EE



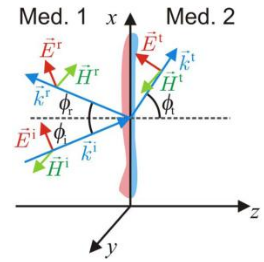
BRECHUNGSGESETZE

Aus Stetigkeits-bedingungen: $\phi_i = \phi_r$

Snellius Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin(\phi_i)}{\sin(\phi_t)} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{n_t}{n_i} = \frac{\left|\vec{k}^t\right|}{\left|\vec{k}^i\right|}$$

Brechzahl: $n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$



Reflexions- und Transmissionsfaktoren:

parallel	$\Gamma_\parallel = \frac{Z_{w2}\cos(\phi_t) - Z_{w1}\cos(\phi_i)}{Z_{w2}\cos(\phi_t) + Z_{w1}\cos(\phi_i)}$ $T_\parallel = \frac{2Z_{w2}\cos(\phi_i)}{Z_{w2}\cos(\phi_t) + Z_{w1}\cos(\phi_i)}$	$1 + \Gamma_\parallel = T_\parallel\frac{\cos(\phi_t)}{\cos(\phi_i)}$
senkrecht	$\Gamma_\perp = \frac{Z_{w2}\cos(\phi_i) - Z_{w1}\cos(\phi_t)}{Z_{w2}\cos(\phi_i) + Z_{w1}\cos(\phi_t)}$ $T_\perp = \frac{2Z_{w2}\cos(\phi_i)}{Z_{w2}\cos(\phi_i) + Z_{w1}\cos(\phi_t)}$	$1 + \Gamma_\perp = T_\perp$

BREWSTER-WINKEL & TOTALREFLEXION

Brewster-Winkel:
Bei *Parallelpolarisation (TE^y, d.h. $\Gamma_\parallel = 0$)* tritt für einen bestimmten Winkel keine Reflexion auf, d.h. alles wird transmittiert.

$\sin(\phi_i^B) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}$ oder $\mu_r = 1$: $\tan(\phi_i^B) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} = \frac{n_t}{n_i}$

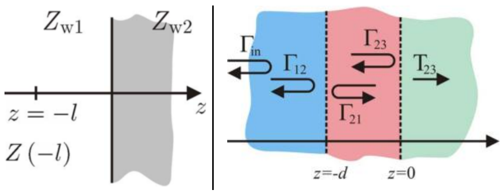
Kritischer Winkel:
Bei *beiden* Polarisationen tritt beim Übergang von optisch dichteren ins optisch dünnere Medium ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) Totalreflexion auf (wenn $\phi_i > \phi_c$). Der Transmissionswinkel wird dann komplex.

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2, \qquad \sin(\phi_c) = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}}$$

Komplexer Transmissionswinkel:

$$\sin(\phi_t) = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\sin(\phi_i) = \frac{\sin(\phi_i)}{\sin(\phi_c)}$$

GESCHICHTETE DIELEKTRIKA



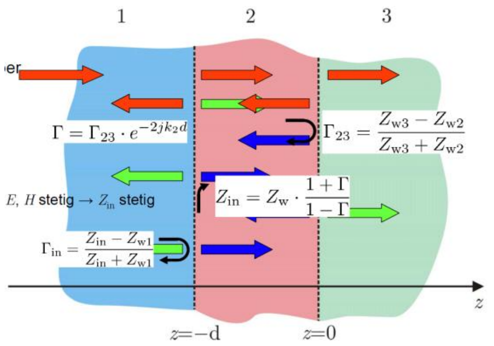
Lokale Impedanz:

$$Z(-l) = \frac{\underline{E}_{tot}(-l)}{\underline{H}_{tot}(-l)} = Z_{w1}\frac{Z_{w2} + jZ_{w1}\tan(\beta_1 l)}{Z_{w1} + jZ_{w2}\tan(\beta_1 l)} \neq Z_w$$

Eingangsreflexionsfaktor:

$$\Gamma_{in}(z=-d) = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23}e^{-j2\beta_2 d}}{1 + \Gamma_{12}\Gamma_{23}e^{-j2\beta_2 d}}$$

Z stetig, aber schwer zu transformieren.
Γ nicht stetig, aber leicht zu transformieren.



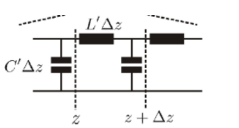
LEITUNGSTHEORIE

TEM-Wellen:

$$E_z = H_z = 0, \qquad \vec{E} \perp \vec{H}, \qquad |\vec{E}| = Z_w|\vec{H}|$$

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_w}(\vec{e}_z \times \vec{E}), \qquad \vec{E} = Z_w(\vec{H} \times \vec{e}_z)$$

LEITUNGSERSATZSCHALTBILD



$$\frac{\partial U(z,t)}{\partial z} = -L'\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -C'\frac{\partial U(z,t)}{\partial t}$$

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{\varepsilon}{U}\oint_{C_2} E_t ds$$

$$L' = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu}{I}\int_{C_1} H_t ds = \frac{\mu\varepsilon}{C'}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \beta = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{L'C'} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega L'}{Z_0}, \quad [\beta] = \frac{rad}{m}$$

Im Frequenzbereich:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_0^+ e^{-j\beta z} + \underline{U}_0^- e^{+j\beta z}$$

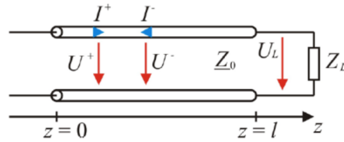
$$\underline{I}(z) = \frac{\beta}{\omega L'}\underline{U}_0^+ e^{-j\beta z} - \frac{\beta}{\omega L'}\underline{U}_0^- e^{+j\beta z}$$

Im Zeitbereich:

$$U(z,t) = |U_0^+|\cos(\omega t - \beta z + \phi^+) + |U_0^-|\cos(\omega t + \beta z + \phi^-)$$

$$I(z,t) = \frac{|U_0^+|}{Z_0}\cos(\omega t - \beta z + \phi^+) - \frac{|U_0^-|}{Z_0}\cos(\omega t + \beta z + \phi^-)$$

LEITUNGSIMPEDANZ



Charakteristische (Leitungs-)Impedanz:

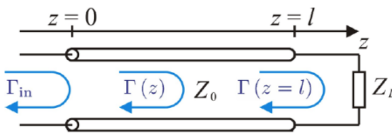
$$Z_0 = \frac{U^+}{I^+} = -\frac{U^-}{I^-} = Z_w\frac{\varepsilon}{C'} = Z_w\frac{L'}{\mu} = \frac{\omega L'}{\beta} = \sqrt{L'/C'} \neq Z(z)$$

Z_0 reell ⇔ Leitung verlustlos ⇔ Strom und Spannung in Phase.

Lokale Leitungsimpedanz:

$$Z(z) = \frac{\underline{U}(z)}{\underline{I}(z)} = \frac{\underline{U}_0^+ e^{-j\beta z} + \underline{U}_0^- e^{+j\beta z}}{\frac{\underline{U}_0^+}{Z_0}e^{-j\beta z} - \frac{\underline{U}_0^-}{Z_0}e^{+j\beta z}}$$

REFLEXIONSFAKTOR



Reflexionsfaktor:

$$\Gamma(z=l) = \frac{\underline{U}^-(z=l)}{\underline{U}^+(z=l)} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\Gamma(z) = \frac{\underline{U}^-(z)}{\underline{U}^+(z)} = \Gamma(z=l)e^{-j2\beta(l-z)}, \qquad \Gamma_{in} = \Gamma(z=0)$$

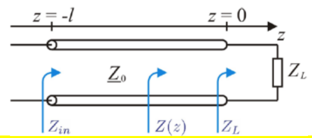
Gesamtspannung:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}^+(z) + \underline{U}^-(z) = \underline{U}^+(z)(1 + \Gamma(z))$$

Gesamtstrom:

$$\underline{I}(z) = \underline{I}^+(z) - \underline{I}^-(z) = \underline{I}^+(z)(1 - \Gamma(z))$$

IMPEDANZTRANSFORMATION



$$Z_{in} = Z(-l) = \frac{\underline{U}(-l)}{\underline{I}(-l)} = Z_0\frac{1+\Gamma(-l)}{1-\Gamma(-l)} = Z_0\frac{Z_L + jZ_0\tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L\tan(\beta l)}$$

Spezialfälle – Leitungslänge:

Länge l	βl	$\tan(\beta l)$	Z_{in}
$n\frac{\lambda}{2}$	$n\pi$	0	$Z_{in} = Z_L$
$(2n+1)\frac{\lambda}{4}$	$(2n+1)\frac{\pi}{2}$	∞	$Z_{in} = Z_0^2/Z_L$
$(4n+1)\frac{\lambda}{8}$	$(4n+1)\frac{\pi}{4}$	1	$Z_{in} = Z_0\frac{Z_L+jZ_0}{Z_0+jZ_L}$
$(4n+3)\frac{\lambda}{8}$	$(4n+3)\frac{\pi}{4}$	1	$Z_{in} = Z_0\frac{Z_L-jZ_0}{Z_0-jZ_L}$

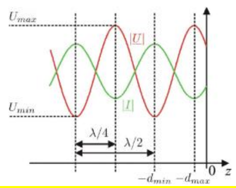
Spezialfälle – Lastimpedanz:

Kurzschluss	$Z_L = 0$	$Z_{in} = jZ_0\tan(\beta l) = Z_{SC}$	$\Gamma = -1$
Leerlauf	$Z_L \to \infty$	$Z_{in} = \frac{Z_0}{j\tan(\beta l)} = Z_{OC}$	$\Gamma = 1$
Abschluss	$Z_L = Z_0$	$Z_{in} = Z_0$	$\Gamma = 0$

Anmerkungen:
- $Z_0 = \sqrt{Z_{SC}Z_{OC}}$
- ***Stichleitung***: Kurzschluss ∥ Z_L oder Leerlauf seriell zu Z_L
- Leitung der Länge $\lambda/4$ heisst ***„λ/4-Transformator"***

Elektrische Länge: $\beta l = \frac{\omega l}{v} = \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_m}$

STEHWELLENVERHÄLTNIS



$$SWR = \frac{|\underline{U}_{max}|}{|\underline{U}_{min}|} = \frac{1 + |\Gamma(z=0)|}{1 - |\Gamma(z=0)|}, \qquad |\Gamma(0)| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$$

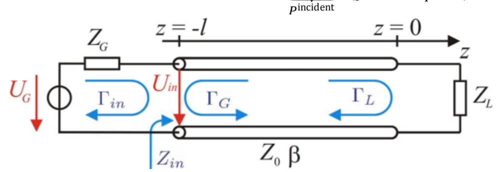
$\underline{U}(z) = \underline{U}_0^+ e^{-j\beta z}(1 + |\Gamma(0)|e^{j(\phi_L - 2\beta z)}) \to |\underline{U}_{max}|, |\underline{U}_{min}|, \ldots$

Spannungsminima bei $d_{min} = (\phi_L + (2n-1)\pi)\frac{\lambda}{4\pi}$

Spannungsmaxima bei $d_{max} = (\phi_L + 2n\pi)\frac{\lambda}{4\pi}$

LEISTUNGSFLUSS & MEHRFACHREFLEXIONEN

$$P^{\text{transmit}}(z) = \frac{1}{2}\Re\{\underline{U}(z)\underline{I}^*(z)\} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{|\underline{U}_0^+|^2}{Z_L}}_{P^{\text{incident}}}\Big(\underbrace{1}_{P^{\text{incident}}} - \underbrace{|\Gamma|^2}_{P^{\text{reflect}}}\Big)$$



Generatorspannung:

$$\underline{U}_G = \underline{U}_{in} + \underline{I}_{in}Z_G = (\underline{U}_0^+ + \Gamma_{in}\underline{U}_0^+) + \frac{Z_G}{Z_0}(\underline{U}_0^+ - \Gamma_{in}\underline{U}_0^+)$$

$$\underline{U}_0^+ = \frac{\underline{U}_G Z_0}{(Z_G + Z_0)(1 - \Gamma_G\Gamma_L e^{-j2\beta l})} = \frac{\underline{U}_G(1-\Gamma_G)}{2(1 - \Gamma_G\Gamma_L e^{-j2\beta l})}$$

Last an Leitung angepasst $Z_L = Z_0 \neq Z_G$:

$$\to \Gamma_L = 0, \qquad SWR = 1, \qquad Z_{in} = Z_0$$

$$P_{in} = \frac{1}{2}\frac{|\underline{U}_G|^2 Z_0}{(Z_0 + R_G)^2 + X_G^2}$$

Generator an Leitung angepasst $Z_{in} = Z_G$, $Z_L \neq Z_0$:

$$\to Z_G \neq Z_0, \qquad \Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_G}{Z_{in} + Z_G} = 0$$

$$P_{in} = \frac{1}{2}\frac{|\underline{U}_G|^2 R_G}{4(R_G^2 + X_G^2)}$$

Konj.-kompl. Anpassung für max. Leistungstransfer $Z_{in} = Z_G^*$:

$$P_{in} = \frac{1}{2}\frac{|\underline{U}_G|^2}{4R_G}$$

Weitere Anpassungen in (Vahldieck, et al., 2011) ***auf S. 100ff***

EINFÜGUNGS- & REFLEXIONSVERLUSTE

Reflexionsverlust:

$$L_r = 10\log_{10}(P^+/P^-) = 10\log_{10}(1/|\Gamma|^2)$$

Einfügungsdämpfung:

$$L_i = 10\log_{10}\left(\frac{P_{lb}}{P_{la}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{U_{lb}}{U_{la}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{I_{lb}}{I_{la}}\right)$$

Dabei ist $?_{lb}$ vor der Einfügung und $?_{la}$ danach re vom Zweitor.

SMITH-CHART

$$\tilde{Z}(z) = \tilde{R}(z) + j\tilde{X}(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}, \qquad Y = \tilde{Y}/Z_0$$

Konstante Widerstandskreise ($\tilde{R}$ = konst., $\tilde{X}$ variiert):
Radius: $\frac{1}{\tilde{R}+1}$, Mittelpunkt: $\left(\frac{\tilde{R}}{\tilde{R}+1}\middle|0\right)$

Konstante Reaktanzkreise:
Radius: $\frac{1}{\tilde{X}}$, Mittelpunkt: $(1|\,1/\tilde{X})$

Konstante Reflexionskreise: ($|\Gamma|$ = konst., ϕ variiert):
Radius: $r \leq 1$, Mittelpunkt: $(0|0)$

ANWENDUNGEN DER SMITH CHART

Admittanz aus Impedanz:
Spiegeln der normierten Impdanz am Ursprung, dann normierte Admittanz entnormieren.

Reflexionsfaktor bestimmen:
$\tilde{Z}$ eintragen, Γ direkt ablesen (von der Mitte aus).

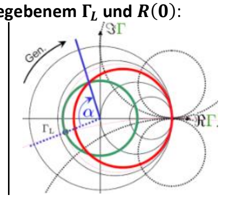
SWR bestimmen:
Drehen der norm. Impedanz auf dem $|\Gamma|$ = konst. Kreis bis zur positiven reellen Achse. Dann Schnittpunkt nach unten ziehen und auf der Skala $|\Gamma|$ ablesen.

Eingangsimpedanz einer kurzgeschl. Stichleitung:
Kurzschluss bei $\tilde{Z} = 0$ einzeichnen, dann aus $|\Gamma|$ = konst. Kreis um die Länge der Stichleitung im Uhrzeigersinn drehen (→Gen.)

Eingangsimpedanz einer $\lambda/4$-Leitung:
Spiegeln der normierten Impedanz am Ursprung.

Leitungslänge l bestimmen bei gegebenem Γ_L und $R(0)$:

$R(0)$ suchen. Alle Γ liegen auf dem Kreis mit $r = |\Gamma_L|$ um $(0|0)$ (grün). Alle $\tilde{R}$ liegen auf Kreis für konst. Widerstand (rot).
Winkel $\alpha = 2\beta l$ (blau).



VERLUSTBEHAFTETE LEITUNGEN

Impedanz- & Admittanzbelag:

$$Z' = R' + j\omega L', \qquad Y' = G' + j\omega C'$$

Ausbreitungskonstante: $\gamma = \sqrt{Z'Y'} = \alpha + j\beta$

Spannung & Strom im Frequenzbereich:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_0^+ e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} + \underline{U}_0^- e^{\alpha z}e^{j\beta z}$$

$$\underline{I}(z) = \frac{\underline{U}_0^+}{Z_0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} - \frac{\underline{U}_0^-}{Z_0}e^{\alpha z}e^{j\beta z}$$

Charakteristische Impedanz:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

Unterschiede zu verlustlos:

- Spannungs- & Stromwellen sind gedämpft
- Spannungen & Ströme nicht mehr in Phase
- β wird grösser und somit $v = \omega/\beta$ kleiner.
- σ endl., also existiert auch im Leiter ein EM-Feld.

Eingangsreflexionsfaktor (Last bei $z = 0$):

$$\Gamma_{in}(z) = \Gamma_L e^{2\alpha z} e^{j2\beta z}, \qquad |\Gamma_{in}(z)| = |\Gamma_L| e^{2\alpha z}$$

Eingangs-/Leitungsimpedanz (Last bei $z = 0$):

$$Z_{in}(z) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(-\gamma z)}{Z_0 + Z_L \tanh(-\gamma z)}$$

Mittlerer Leistungsfluss:

$$P_{av}(z) = \frac{1}{2}\Re\left(\underline{U}(z)\underline{I}^*(z)\right) = \frac{|\underline{U}_0^+|^2}{2|Z_0|} e^{-2\alpha z}\cos(\phi_{Z_0})$$

Verlustleistung:

$$P_{verlust} = P_{av}(z) - P_{av}(z+d) = P_{av}(z)(1 - e^{-2\alpha d})$$

Leitungen mit sehr kleinen Verlusten:

$$R' \ll \omega L', \qquad G' \ll \omega C'$$

HOHLLEITER

GESCHL. WELLENLEITER MIT HOM. DIELEK.

TE-Wellen: transversal elektrisch

$E_z = 0, H_z \neq 0$. Elektrisches Feldvektor transversal zu Ausbreit.

RB: $E_x|_{y=0,b} = 0, E_y|_{x=0,a} = 0$

TM-Wellen: transversal magnetisch

$H_z = 0, E_z \neq 0$. Magn. Feldvektor transversal zu Ausbreitungsr.

RB: $H_x|_{x=0,a} = 0, H_y|_{y=0,b} = 0, E_z|_{x=0,a/y=0,b} = 0$

Wellenvektoren:

$$\vec{k}_{1,2} = k_{x1,x2}\vec{e}_x + \beta\vec{e}_z, \qquad \omega^2\varepsilon\mu = \beta^2 + k_{x_1,x_2}^2, \qquad k_{x1} = -k_{x2}$$

Geführte Wellenlänge: $\lambda_z = 2\pi/\beta_z$

Phasengeschwindigkeit: mit Einspeisungswinkel θ

$$v_{phase} = \lambda_z f = \omega/\beta_z = c/\cos(\theta)$$

Gruppengeschwindigkeit:

$$v_{gruppe} = c_0^2/v_{phase} = \partial\omega/\partial k = c_0\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$$

RECHTECKHOHLLEITER

Grenzfrequenz/Cutoff-Frequenz:

$$f_{c,mn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{1}{\lambda_{c,mn}\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Monomode-Bereich:

Frequenzbereich, in dem nur ein Mode ausbreitungsfähig ist.

Cutoff-Wellenlänge: $\lambda_{c,mn} = \frac{2ab}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}}$

TE-Moden:	TM-Moden:
$m = 0,1,2,3, \ldots$	$m = 1,2,3, \ldots$
$n = 0,1,2,3, \ldots$	$n = 1,2,3, \ldots$
nie $m = n = 0$!	nie $m = 0$ oder $n = 0$!

Geführte Wellenlänge:

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Geführte Phasengeschwindigkeit:

$$v_z = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Ausbreitungskonstante:

$$k_z = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$k_z = \begin{cases} \beta_{mn}, & \omega > 2\pi f_{c,mn} \text{ (Ausbreitung)} \\ j\alpha_{mn}, & \omega < 2\pi f_{c,mn} \text{ (Dämpfung)} \end{cases}$$

Wellenimpedanz für TE-Moden:

$$Z_{TE_{mn}} = \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = -\frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = \frac{\omega\mu}{\beta_{mn}} = Z_w\frac{k}{\beta_{mn}} = Z_w/\sqrt{1 - \left(f_{c,mn}/f\right)^2}$$

Wellenimpedanz für TM-Moden:

$$Z_{TM_{mn}} = \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = -\frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\varepsilon} = Z_w\frac{\beta_{mn}}{k} = Z_w\sqrt{1 - \left(f_{c,mn}/f\right)^2}$$

Feldkomponenten TE_{mn}-Moden:

$$\underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} Z_{TE_{mn}}\underline{H}_y \\ -Z_{TE_{mn}}\underline{H}_x \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\vec{H}} = \begin{pmatrix} \frac{j\beta_{mn}m\pi}{ak_{c,mn}^2}\underline{H}_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_{mn}z} \\ \frac{j\beta_{mn}n\pi}{bk_{c,mn}^2}\underline{H}_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_{mn}z} \\ \underline{H}_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_{mn}z} \end{pmatrix}$$

Feldkomponenten TM_{mn}-Moden:

$$\underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \frac{-j\beta_{mn}m\pi}{ak_{c,mn}^2}\underline{E}_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_{mn}z} \\ \frac{-j\beta_{mn}n\pi}{bk_{c,mn}^2}\underline{E}_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_{mn}z} \\ \underline{E}_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_{mn}z} \end{pmatrix}, \underline{\vec{H}} = \begin{pmatrix} \frac{-\underline{E}_y}{Z_{TM_{mn}}} \\ \frac{\underline{E}_x}{Z_{TM_{mn}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anm.: Bei TE_{mn} gibt es Moden für $m = 0$ oder $n = 0$.

Bei TM_{mn} gibt es *keine* Moden für $m = 0$ oder $n = 0$.

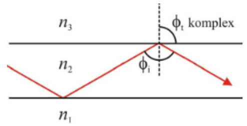
Flächenstrom: $\underline{\vec{J}}_{surface} = \vec{n} \times \underline{\vec{H}}$

RUNDHOHLLEITER

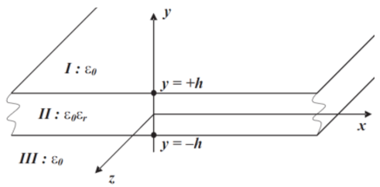
Herleitungen: Skript (Vahldieck, et al., 2011) Seite 145ff

Formelsammlung: Skript S. 155. Kein Prüfungsstoff.

DIELEKTRISCHE WELLENLEITER



SCHICHTWELLENLEITER



Wellenausbreitung:

Der Wellenleiter führt die elektromagnetische Welle in z-Richtung. In den Bereichen I und II wird angenommen, dass das Feld für $y \to \pm\infty$ verschwindet. Die Ausbreitungskonstante β in z-Richtung ist in allen Bereichen gleich.

Im Folgenden wird überall $\mu_r = 1$ angenommen.

Dämpfungskonstante in y-Richtung:

$$\alpha_y = \sqrt{\beta^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0}$$

Wellenvektor in y-Richtung im Bereich II:

$$k_{yII} = \sqrt{\omega^2\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0 - \beta^2}$$

Grenzfrequenz/Cutoff-Frequenz:

$$f_c = \frac{mc_0}{4h\sqrt{\varepsilon_r - 1}}, \qquad m = \begin{cases} 1,3,5, \ldots, & \text{gerade Lösung} \\ 0,2,4, \ldots, & \text{ungerade Lösung} \end{cases}$$

Für die Felder vesch. Moden: S.158 in (Vahldieck, et al., 2011)**.**

FASERWELLENLEITER

Dämpfungskoeffizient: $\alpha = -\frac{10}{\Delta z}\log\left(\frac{P(z_0 + \Delta z)}{P(z_0)}\right)$

Brechungsgesetz von Snellius: $\frac{\sin(\phi_i)}{\sin(\phi_t)} = \frac{n_t}{n_i}$

Brechzahldifferenz: $\Delta n = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$

Totalreflexion:

Trifft der Lichtstrahl unter einem Sinkel grösser als der kritische auf die Grenzfläche eines dünneren Mediums ($n_1 > n_2$), dann kommt es zur Totalreflexion.

Kritischer Winkel: $\sin(\phi_c) = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_t}{n_i}$

Numerische Apertur NA: $NA = \sin(\theta_{max}) = \sqrt{n_i^2 - n_t^2}$

mit θ_{max} dem maximalen Einspeisungswinkel, damit Totalreflexion auftritt.

ANTENNEN

ANTENNENPARAMETER

Strahlungsdichte:

$$S(\theta,\phi) = r^2\frac{1}{2}\Re(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*)\vec{e}_r, \qquad [S] = W$$

Mittlere Strahlungsdichte: $S_{av} = \frac{P_{rad}}{4\pi}$

Strahlungsleistung: $[P_{rad}] = W$

$$P_{rad} = \oiint_{Kugel} \vec{S} \cdot d\vec{F} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta,\phi)\sin(\theta)\,d\phi\,d\theta$$

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{P_{rad}}{P}$ mit P: eingespeiste Leistung

Eingespeiste Leistung: $P = P_{rad} + P_{verlust}$

Richtfaktor: $D(\theta,\phi) = \frac{S(\theta,\phi)}{S_{av}}$

Max. Richtfaktor: $D_0 = \frac{S_{max}}{S_{av}} = 4\pi\frac{S_{max}}{P_{rad}}$

Gewinn: $G(\theta,\phi) = \eta D(\theta,\phi)$

Max. Gewinn: $G_0 = \eta D_0 = \eta\frac{S_{max}}{S_{av}} = 4\pi\frac{S_{max}}{P}$

Strahlungswiderstand: $R_S = \frac{2P_{rad}}{|\underline{I}|^2}$, $[R_S] = \Omega$

HERTZ'SCHER DIPOL

PARAMETER

Strahlungsdichte: $S(\theta) = \frac{|\underline{I}|^2 Z_{w0}}{8}\left(\frac{l}{\lambda_0}\right)^2\sin^2(\theta)$

Mittlere Strahlungsdichte: $S_{av} = \frac{|\underline{I}|^2 Z_{w0}}{12}\left(\frac{l}{\lambda_0}\right)^2$

Maximale Strahlungsdichte: $S_{max} = \frac{|\underline{I}|^2 Z_{w0}}{8}\left(\frac{l}{\lambda_0}\right)^2$

Strahlungsleistung: $P_{rad} = \frac{|\underline{I}|^2 Z_{w0}\pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda_0}\right)^2$

Richtfaktor: $D(\theta) = \frac{3}{2}\sin^2(\theta)$

Max. Richtfaktor: $D_0 = \frac{3}{2}$

Strahlungswiderstand: $R_S = Z_{w0}\frac{2\pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda_0}\right)^2$

FELD

Dipolmoment: $\underline{p} = \frac{-\underline{I}l}{4\pi j\omega\varepsilon_0} = \frac{-\underline{I}lZ_{w0}}{4\pi jk_0}$

Wellenimpedanz: $Z_{w0} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$

Wellenvektor: $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$

$\vec{E}$-Feld:

$$\underline{E}_r = -2\underline{p}\frac{e^{-jk_0 r}}{r^3}(1 + jk_0 r)\cos(\theta), \quad \underline{E}_\phi = \underline{0}$$

$$\underline{E}_\theta = -\underline{p}\frac{e^{-jk_0 r}}{r^3}(1 + jk_0 r - k_0^2 r^2)\sin(\theta)$$

$\underline{\vec{H}}$-Feld:

$$\underline{H}_r = \underline{0}, \qquad \underline{H}_\theta = \underline{0}, \qquad \underline{H}_\phi = \frac{\underline{I}l}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r^2}(1 + jk_0 r)\sin(\theta)$$

<table>
<tr><td>Nahfeld
$\lambda \gg r \gg l, \quad l \ll \lambda$
$\Rightarrow k_0 r \ll 1$</td><td>$\underline{E}_r = -2\underline{p}\frac{e^{-jk_0 r}}{r^3}\cos(\theta)$
$\underline{E}_\theta = -\underline{p}\frac{e^{-jk_0 r}}{r^3}\sin(\theta)$
$\underline{H}_\phi = -\underline{p}\frac{jk_0}{Z_{w0}}\frac{e^{-jk_0 r}}{r^2}\sin(\theta)$
andere Komponenten $= 0$
• $|\underline{\vec{E}}|$ und $|\underline{\vec{H}}|$ in keinem festen Verhältnis.
• Felder 90° phasenverschoben
• direkt beim Hertz'schen Dipol: $\underline{\vec{E}} \perp \underline{\vec{H}}$</td></tr>
<tr><td>Fernfeld
$r \gg \lambda_0, \ l \ll \lambda$
$\Rightarrow k_0 r \gg 1$</td><td>$\underline{E}_r = \underline{0}$
$\underline{E}_\theta = \underline{p}k_0^2\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\sin(\theta) = Z_{w0}\underline{H}_\phi$
$\underline{H}_\phi = \underline{p}k_0^2\frac{1}{Z_{w0}}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\sin(\theta)$
andere Komponenten $= 0$
• Welle ist eine ebene Welle
• $|\underline{\vec{E}}|/|\underline{\vec{H}}| = Z_{w0} \approx 377\Omega$</td></tr>
</table>

Fraunhofer-Distanz: Gültigkeit Fernfeld

$$d \geq 2D^2/\lambda$$

D: grösste Ausdehnung der Antenne („Antennendurchmesser")

d: Abstand Sender $\leftrightarrow$ Empfänger

TODO

- verlustbehafteter schräger Einfall
- Stetigkeitsbedingungen bei schrägem Einfall !! (VD März 06)
- mehrfachreflexionen in der leitungstheorie
- Impedanztransformation bei verlustbehafteten Leitern.
- evtl. zirkuläre Polarisation bei ebenen Wellen als Überlagerung von 2 ebenen Wellen schreiben.

Überlagerung von zwei ebenen Wellen:

$$\underline{\vec{E}}_{tot} = \underline{E}_0 e^{-j\beta z}\left(e^{-jk_{x1}x} - e^{-jk_{x2}x}\right)\vec{e}_y$$

$$\underline{\vec{E}}_{tot} = -2j\underline{E}_0 e^{-j\beta z}\sin(k_{x1}x)\,\vec{e}_y$$

LITERATURVERZEICHNIS

Leuchtmann Pascal Einführung in die elektromagnetische Feldtheorie [Buch]. - [s.l.] : Pearson Studium, 2005. - ISBN 3-8273-7144-9.

Vahldieck Rüdiger und Leuchtmann Pascal Felder und Komponenten II. - [s.l.] : IFH, ETH Zurich, 2011. - 11. Auflage. - Skript zur Vorlesung im 4. Semester.