

# SIGNAL- & SYSTEMTHEORIE I

Zusammenfassung zur Vorlesung von  
Prof. Dr. E. Bölskei

Lukas Cavigelli, Februar 2011  
[lukasc@ee.ethz.ch](mailto:lukasc@ee.ethz.ch)

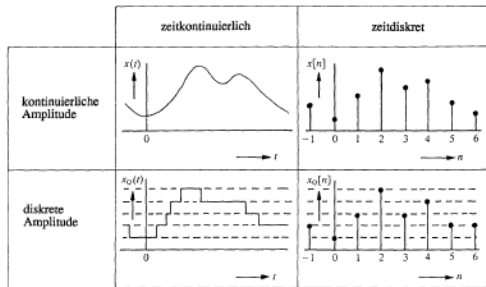
## ELEMENTARE SIGNALE

### EINTEILUNG DER SIGNALE

Zeitsignale:  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  oder  $f(t) \in \mathbb{C}$ ,  $f(t) = f_R(t) + jf_I(t)$   
z.B. Audiosignale, Bildsignale ( $f(x, y)$ )  
Zeitabhängige Signale: Videosignale  $f(x, y, t)$

Einteilung:

	Zeit kontin.	Zeit diskret
Amplit. kont.	Analoge Signale $f(t) \in \mathbb{C}$ , $t \in \mathbb{R}$	zeitdiskret
Ampl. diskret	z.B. aus D/A-Wandler	Digitale Signale



## SYSTEMEIGENSCHAFTEN - ALLGEMEIN



$f(t)$ : Eingangssignal      $g(t)$ : Ausgangssignal  
 $g(t) \rightarrow S \cdot f(t)$ ,      $g(t) = S\{f(t)\}$

### Linearität:

- Additivität: wenn  $S\{f_1(t) + f_2(t)\} = S\{f_1(t)\} + S\{f_2(t)\}$   
für alle  $f_1(t), f_2(t)$ , für die  $f_1(t) + f_2(t)$  in Def-Bereich von  $S$ .  
- Homogenität:  $S$  ist homogen, wenn  $S\{af(t)\} = \forall a \in \mathbb{C}$  gegeben  
ist durch  $S\{af(t)\} = aS\{f(t)\}$ .

Ein System  $S$  ist linear, wenn  $S$  additiv und homogen.

→ Superpositionsprinzip:  $S\{\sum_k \alpha_k f_k(t)\} = \sum_k \alpha_k S\{f_k(t)\}$   
→  $S\{0\} = 0$

### Zeitinvarianz: Wenn

$S\{f(t)\} = g(t) \Rightarrow S\{f(t - t_0)\} = g(t - t_0)$

Streckung & Stauchung nie zeitinvariant.

**Gedächtnis:** Ein System ist gedächtnislos, wenn das Ausgangssignal  $y(t_0)$  nur vom momentanen Wert des Eingangssignals  $x(t_0)$  abhängt.

**Invertierbarkeit:** Wenn das Ausgangssignal durch das Eingangssignal klar bestimmt ist.

**Stabilität:** Wenn das Ausgangssignal bei endlichem Eingangssignal beschränkt bleibt. Auch BIBO-Stabilität („bounded input, bounded output“).

Beweis:  $\forall x(t): |x(t)| \leq M_x < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq M_y < \infty$

**Kausalität:** Wenn Ausgangssignal nur von vergangener Eingangssignal abhängt. Echtzeitsysteme sind immer kausal.  
Beweis:  $y(t_0)$  hängt nur von  $x(t)$ ,  $t \leq 0$  ab.

**Realisierbarkeit:** Wenn stabil und kausal.

**LTI-Systeme:** Wenn linear und zeitinvariant.  $\Leftrightarrow \exists H(t)$

## ANALOGUE TESTSIGNALE

**Testsignal Sinusschwingung:**  $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$A$ : Amplitude,  $\omega$ : Kreisfrequenz,  $\varphi$ : Phasenverschiebung

**Einschaltvorgang Heaviside:**  $f(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$   
 $\begin{cases} 1/2, & t = 0 \end{cases}$

**Spannungsimpuls Dirac-Delta:**  $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

z.B. Gaussfunktion mit konst. Fläche, immer spitziger.

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$

$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \sigma(t)$ ,  $\delta(t) = \frac{d}{dt}\sigma(t)$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \quad \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt$$

Produkte von Deltafunktionen kommen hier nicht vor.

Substitution des Arguments bei Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at + b)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u-b}{a}\right)\delta(u)\frac{1}{|a|}du = \frac{1}{|a|}f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$\delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$$

Siebeeigenschaft:  $L_{\delta(t-t_0)}f(t) = \int f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$

Wenn möglich auf  $\delta(t)$  zurückführen durch Substitution.

**Gewicht** spezifizieren, trotz Unendlichkeit bei Delta-Funktion

**Integration der Delta-Funktion:**

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t I_{(-\infty, \tau]}(\tau)\delta(\tau)d\tau = I_{(-\infty, t]}(0) = \sigma(t)$$

$$I_{(-\infty, t]}(\tau) = \begin{cases} 1, & t \in (-\infty, t] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\sigma(t) = \delta(t)$$

## UN- & GERADE TEILE EINER FUNKTION

$$x_{\text{gerade}}(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)), \quad x_{\text{ungerade}} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

Es gilt:  $x_g(t) = x_g(-t)$  und  $x_u(t) = -x_u(-t)$

## BSP: SYSTEMEIGENSCHAFTEN

$$S: y(t) = \cos(\omega_0 t + x(t))$$

Linearität:  $S\{\alpha x(t)\} = \cos(\omega_0 t + \alpha x(t)) \neq \alpha \cos(\omega_0 t + x(t))$

$\Rightarrow$  nicht linear

Zeitinvarianz:  $S\{x(t - t_0)\} = \cos(\omega_0(t - t_0) + x(t - t_0)) \neq \cos(\omega_0(t - t_0) + x(t - t_0)) \Rightarrow$  Zeitvariant

Gedächtnislosigkeit: siehe allg. Begr.

## ANALOGUE LTI-SYSTEME IM ZEITBEREICH

### IMPULSANTWORT

Rechteckimpuls:  $p_{\Delta\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\tau}, & 0 \leq t \leq \Delta\tau \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Eingangssignal ist also Sequenz von Rechteckimpulsen:

$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{\Delta\tau}(t - i\Delta\tau) \Delta\tau f(i\Delta\tau) + \epsilon_{\Delta\tau}(t)$$

Fehler

$$\Delta\tau \rightarrow 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = f(t)$$

ein LTI-System antwortet mit dem **Faltungintegral**:

$$g(t) = (f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t - \tau)d\tau$$

= gewichtete Summe zeitlich verschobener LTI-Signale mit der **Impulsantwort**:

$$h(t) = S\{\delta(t)\}$$

Das Ausgangssignal eines LTI-Systems erhält man durch Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort des Systems:

$$y(t) = (x * h)(t)$$

## SPRUNGANTWORT

**Sprungantwort** eines LTI-Systems:

$$a(t) := S\{\sigma(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$$

$$a(t) := S\{\sigma(t)\} = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau, \quad h(t) = \frac{d}{dt}a(t)$$

→ Sprungantwort = Integration der Impulsantwort

## SYSTEMEIGENSCHAFTEN – LTI-SYSTEME

- kommutativ:  $(f * h)(t) = (h * f)(t)$
- distributiv:  $(f * (h_1 + h_2))(t) = (f * h_1)(t) + (f * h_2)(t)$
- assoziativ:  $(f * (h_1 * h_2))(t) = ((f * h_1) * h_2)(t)$

**Gedächtnis:** Ein LTI-System ist gedächtnislos, wenn

$g(t) = K f(t)$  (d.h. wenn  $h(t) = K \delta(t)$ )  $\Rightarrow$  nur Verstärker  
 $\Leftrightarrow h(t) = 0 \forall t \neq 0$

### BIBO-Stabilität:

Bei LTI-Systemen ist die absolute Integrierbarkeit der Impulsantwort äquivalent mit der Stabilität des Systems:

Wenn  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$  und  $|f(t)| < \infty$  dann  $|g(t)| < \infty$

**Absolut integrierbar**, wenn  $h(t) \propto \frac{1}{t^{1+\epsilon}}$ ,  $\epsilon > 0$  (!)

**Kausalität:** Ein LTI-System ist kausal, wenn  $h(t) = 0 \forall t < 0$

**Impulsantwort:** Ein LTI-System hat immer eine zugehörige Impulsantwort. Ein System, das kein LTI-System ist hat keine Impulsantwort.

**Invertierbarkeit:** Ein LTI-System  $S$  ist invertierbar, wenn ein  $h_{inv}(t)$  existiert, so dass  $(h * h_{inv})(t) = \delta(t)$

$\rightarrow$  einfach im Frequenzbereich, sehr schwierig im Zeitbereich.

## BSP: SYSTEMEIGENSCHAFTEN LTI

$$S: y(t) = e^t \int_{t-1}^t e^{-\tau} x(\tau) d\tau$$

Linearität:  $S\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = e^t \int_{t-1}^t e^{-\tau} (\alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau)) d\tau = \alpha_1 \int_{t-1}^t e^{-\tau} x_1(\tau) d\tau + \alpha_2 \int_{t-1}^t e^{-\tau} x_2(\tau) d\tau = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \Rightarrow$  linear

Zeitinvarianz:  $S\{x(t - t_0)\} = e^{t-t_0} \int_{t-1-t_0}^t e^{-\tau} x(\tau - t_0) d\tau$

$$\tau' = \tau - t_0: e^t \int_{t-1-t_0}^t e^{-(\tau'+t_0)} x(\tau') d\tau' = e^{t-t_0} \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} e^{-\tau'} x(\tau') d\tau' = y(t - t_0) \Rightarrow$$

Zeitvariant

$$e^{t-t_0} \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} e^{-\tau'} x(\tau') d\tau' = y(t - t_0) \Rightarrow$$

Zeitvariant

$$e^{t-t_0} \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} e^{-\tau'} x(\tau') d\tau' = y(t - t_0) \Rightarrow$$

Zeitvariant

Impulsantwort:

$$S\{\delta(t)\} = e^t \int_{t-1}^t e^{-\tau} \delta(\tau) d\tau = e^t \int_{t-1}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Gedächtnisbehafte: da  $h(0.5) \neq 0 \Rightarrow$  Gedächtnis

Kausalität: da  $h(t) = 0 \forall t < 0 \Rightarrow$  kausal

BIBO-Stabilität:  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \dots = e^1 - e^0$

## BSP: FALTUNG MIT SPRUNGFUNKTIONEN

$$f(t) = e^{-at}\sigma(t), \quad h(t) = \sigma(t)$$

$$g(t) = (f * h)(t) = \int f(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int f(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - \tau)e^{-a\tau}\sigma(\tau)d\tau$$

$$\sigma(t - \tau)\sigma(\tau) = \begin{cases} 1, & (t - \tau \geq 0) \wedge (\tau \geq 0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightarrow g(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \rightarrow \text{Achtung: } 0, \text{ falls } t < 0 \Rightarrow \sigma(t) \int_0^t e^{-a\tau} d\tau$$

## BSP: GRAPHISCHE FALTUNG

$$h(t) = p_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \text{ und } f(t) = \sigma(t)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

1.  $h(\tau)$  spiegeln an y-Achse aka um  $\tau = 0$ .  $\rightarrow h(-\tau)$

2.  $h(-\tau)$  um  $t$  verschieben ( $t > 0 \rightarrow$  nach rechts)

3. Multiplizieren mit  $f(\tau)$

4. „integrieren“:  $h$  von li nach re schieben, Fläche betrachten.

$\rightarrow$  Abschnittweise auswerten. hier:  $t < 0, 0 \leq t < T, t \geq T$

Faltung von Rechtecken  $\rightarrow$  Dreiecke

## ANALOGUE, LINEARE SYSTEME IM FREQ.-BER.

$$f(t) \left\{ \begin{array}{l} \delta(t) \\ e^{j\omega t} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{LTI}} \left\{ \begin{array}{l} h(t) \\ H(j\omega)e^{j\omega t} \end{array} \right\} g(t)$$

## EIGENFUNKTIONEN ANALOGER, LINEARER SYS

Eingangssignal:  $f(t) = e^{j\omega t}$  ist Eigenfunktion von LTI-Systemen

Ausgangssignal:  $g(t) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau = e^{j\omega t} H(j\omega)$

Die Funktionen  $e^{j\omega t}$  sind Eigenfunktionen von LTI-Systemen.

Ein LTI-System antwortet auf ein harmonisches Eingangssignal mit einem harmonischen Signal der gleichen Frequenz, zusätzlich mit der komplexen Amplitude  $H(j\omega)$  (Eigenwert).

## EIGENSCHAFTEN DES FREQUENZGANGS

$$H(j\omega) = \frac{g(t)}{f(t)} \Big|_{f(t)=e^{j\omega t}} = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

**Hermiteische Symmetrie:**  $H(j\omega) = H^*(-j\omega)$

$H_R(\omega) = H_R(-\omega)$ : gerade

$H_I(\omega) = -H_I(-\omega)$ : ungerade

**Darstellung Betrag & Phase:**  $H(j\omega) = A(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}$

- bei reellen Systemen:  $A(\omega) = A(-\omega)$

$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bei **stabilen** LTI-Systemen gilt:  $|H(j\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$

**Einschaltvorgang:**  $f(t) = e^{j\omega t}\sigma(t)$

(wenn BIBO-stabil)  $\rightarrow g(t) = e^{j\omega t}H(j\omega)$

**Gleichmässige Stetigkeit:** Ist  $H(j\omega)$  nicht stetig, ist das LTI-System nicht BIBO-stabil.

**Kaskadierung** von LTI-Systemen:  $h_1(t) * h_2(t) \Rightarrow H_1(j\omega)H_2(j\omega)$

**Verallgemeinerung:**  $G(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)$

**Theorem:** Wenn  $h(t)$  absolut integabel, dann ist  $H(j\omega)$  gleichmässig stetig in  $\omega$ .

**Gleichmässige Stetigkeit:**

Ein Funktion  $f(x)$  ist auf dem Intervall  $[a, b]$  gleichmässig stetig, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein nur von  $\epsilon$  abhängiges  $\delta = \delta(\epsilon)$  gibt, so dass  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x, y \in [a, b]$ . Bsp.:  $f(x) = x^2$  ist stetig, nicht gleichm. stetig

**Riemann-Lebeque Theorem:**

Absolute Integribarität  $\rightarrow$  Abklingen der FT mit  $\omega \rightarrow \infty$

**FOURIER-TRANSFORMATION**

Klassen von Fourier-transformierbaren Funktionen: absolut integable, quadr. ( $L_2$ ) integable & verallgem. Funkt.

**DEFINITION**

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

**EIGENSCHAFTEN**

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Linearität:	$af(t) + bg(t)$	$aF(j\omega) + bG(j\omega)$
zeitl. Spiegelung:	$f(-t)$	$F(-j\omega)$
Konjugation:	$f^*(t)$	$F^*(-j\omega)$
Zeitverschiebung:	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$
Modulation:	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(j(\omega - \omega_0))$
Differenziation:	$\frac{d}{dt} f(t)$	$j\omega F(j\omega)$
Integration:	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
Zeit-Skalierung:	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
Parseval-Relation:	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  X(j\omega) ^2 d\omega$
Multipl. in Zeitber:	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} [F_1 * F_2](j\omega)$
Faltung:	$[f_1 * f_2](t)$	$F_1(j\omega)F_2(j\omega)$
Dualität 1:	$\frac{1}{2\pi} X(-jt)$	$x(\omega)$
Dualität 2:	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
Poisson-Summe:	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t + nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(jn\frac{2\pi}{T}\right) e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$

**spezielle Formen:**

- $f(t)$  reell, gerade  $\rightarrow F(j\omega)$  reell, gerade
- $f(t)$  reell, ungerade  $\rightarrow F(j\omega)$  rein imaginär, ungerade
- $f(t)$  ungerade,  $\Im(F(j\omega)) > 0 \rightarrow F(j\omega)$  unger., rein imag.
   
 $\Re(F(j\omega)) = \mathcal{F}(f_g(t)), \quad \Im(F(j\omega)) = \mathcal{F}(f_u(t))$

**EINIGE FOURIER-TRANSFORMIERTE**

Zeitbereich	Frequenzbereich
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\sigma(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$



**ANWENDUNG DER FT AUF LTI-SYSTEME**

**Faltungsbeziehung:**

$$g(t) = [f * h](t) \Leftrightarrow G(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$$

**FT periodischer Funktionen:**

Die FT periodischer Funktionen ist nur nicht-null-beiganzahligen Vielfachen von  $\frac{2\pi}{T}$ .

**EINSCHUB DISKRETE FT**

$$\hat{a} = Fa, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{n}kl} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

t entspricht l, k entspricht  $\omega$

Mit U einer unitären Matrix, so gilt:

$$U^H = U^{-1}, \quad UU^H = I, \quad U^H = U^{T*}$$

**GANZ SPEZIELLES**

$$\ln(|X(j\omega)|) = -|\omega|, \quad |X(j\omega)| = e^{-|\omega|}$$

Bei gerader Funktion kann u.U. das Integral einfach werden.

**HARMONISCHE ANALYSE – FOURIER-REIHEN**

Fourier-Reihen sind eine Vereinfachung der FT für period. Sig.

**ANALYSE- UND SYNTHESGLEICHUNGEN**

- Periodizität:**  $f(t + T) = f(t) \forall t, T > 0$
- Fundam.-Periode:** T (auch FP genannt)
- Grundfrequenz:**  $\frac{1}{T}$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- Analyse:**  $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t} dt$
- Synthese:**  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$

**EIGENSCHAFTEN DER FOURIER-REIHE**

- Existenzbed.:**
  - abs. Integrierbark.:  $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$
  - endl. Anzahl Max und Min in einer FP
  - endl. Anzahl Sprünge in der FP

- Linearität:**  $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \Leftrightarrow \sum a_k c_{1,k} + a_2 c_{2,k}$
- Konj. kompl. F.:**  $f^*(t) \Leftrightarrow c_{-k}^*$
- Reelle Funkt.:**  $f(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_{-k} = c_k^*$
- Spiegelung:**  $f(-t) \Leftrightarrow c_{-k}$
- gerade Funkt.:**  $f(-t) = f(t) \Leftrightarrow c_{-k} = c_k$
- ungerade Funkt.:**  $f(-t) = -f(t) \Leftrightarrow c_{-k} = -c_k$
- ung., harmon. F.:**  $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) \Leftrightarrow c_k = 0$  für ger. k

- Zeitverschiebung:**  $f(t - t_0) \Leftrightarrow c_k e^{-jk\omega_0 t_0}$
- Differenziation:**  $\frac{d}{dt} f(t) \Leftrightarrow jk\omega_0 c_k$
- Integration 1:**  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{jk\omega_0} c_k, c_0 = 0$

**Integration 2:**  $\int_0^t f(\tau) d\tau = c_0 t + \sum_{k \neq 0} \frac{c_k T}{j2\pi k} (e^{j\frac{2\pi}{T}kt} - 1)$

**Period. Faltung:**  $\frac{1}{T} \int_0^T f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau \Leftrightarrow c_{1,k}c_{2,k}$

**Mult. in Zeitber.:**  $f_1(t)f_2(t) \Leftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{1,l}c_{2,k-l}$

**Parseval-Relat.:**  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$

**PERIODISCHE SIGNALE AN LTI-SYSTEMEN**

**Spektr. period. Sig.:** Period. Sig. haben ein Linienspektrum

**Poisson Summenformel:**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

**FT eines Impulskammes:** ist wieder ein Impulskamm

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

**LAPLACE-TRANSFORMATION**

**MOTIVATION**

$f(t) = e^{st}, \quad s = \sigma + j\omega, \quad g(t) = e^{st}H(s)$

$e^{st}$  mit  $s = \sigma + j\omega$  sind **Eigenfunktionen** von LTI-Systemen mit den zugehörigen **Eigenwerten**  $H(s)$ .

**DEFINITION**

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega$$

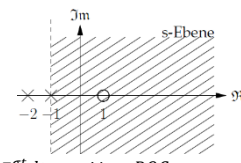
Verallgemeinerung der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)e^{-\sigma t}\}(j\omega), \quad \sigma = 0 \rightarrow \mathcal{L} \equiv \mathcal{F}$$

**KONVERGENZGEBIET (ROC)**

**Pol-Nullstellen-Diagramm:**

Nullstellen:  $\circ$ , Polstellen:  $\times$



Allgemein:  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty \forall s \in \text{ROC}$   
 $\rightarrow$  keine Pole bei  $X(s) \in \mathbb{R}$

Signal endl. Länge:  $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty \rightarrow \text{ROC} = \mathbb{C}$

- re-seitige Signale:  $\Re(s) = \sigma_0 \in \text{ROC} \rightarrow \{\Re(s) \geq \sigma_0\} \in \text{ROC}$
  - li-seitige Signale:  $\Re(s) = \sigma_0 \in \text{ROC} \rightarrow \{\Re(s) \leq \sigma_0\} \in \text{ROC}$
  - beidseitige Signale:  $\Re(s) = \sigma_0 \in \text{ROC} \rightarrow$  Streifen um  $\sigma_0 \in \text{ROC}$
- Die ROC muss ein senkrechter zusammenhängender Streifen sein und darf keine Polstelle beinhalten.

**UMKEHRUNG**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

bei gebrochen-rationalen Funktionen: Partialbruchzerlegung

**EIGENSCHAFTEN**

**Unterschied zur FT:** erlaubt Transformation anklingender Signale der Form  $e^{at}, a > 0$ .

**WICHTIGE KORRESPONDENZEN**

Zeitbereich	Laplacebereich	ROC
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \sigma(t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$\sigma > -\alpha$
$\frac{-t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \sigma(-t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$\sigma < -\alpha$

**ANWENDUNG DER LT AUF LTI-SYSTEME**

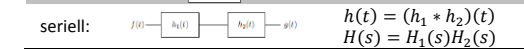
**Kausalität:**  $\Rightarrow$  ROC muss *eine* rechte Halbebene sein.  $\neq$  ROC ist eine rechte Halbebene

$H(s) \in \mathbb{R}$ , kausal  $\Leftrightarrow$  ROC ist *eine* rechte Halbebene jenseits des rechtesten Poles.

**BIBO-Stabilität:** Ein kausales LTI-System mit  $H(s) \in \mathbb{R}$  ist genau dann stabil, wenn der Realteil aller Pole negativ.

$j\omega$ -Achse  $\in$  ROC  $\Rightarrow$  stabil

**Zusammenschaltung von LTI-Systemen:**



**IDEALISIERTE TIEFPASSSYSTEME**

verzerrungsfrei  $\Leftrightarrow$  LTI, stabil, kausal, allpass, lineare Phase

**TIEFPASS: KONST. BETRAG, LINEARE PHASE**

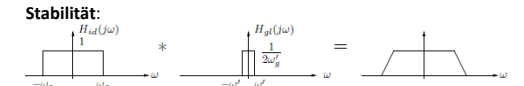
Frequenzgang	Impulsantwort
$ H(j\omega)  = \begin{cases} 1, &  \omega  \leq \omega_g \\ 0, &  \omega  > \omega_g \end{cases}$	$h(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \text{sinc}(\omega_g(t - t_0))$
$\varphi(\omega) = -\omega t_0$	

**Sprungantwort a(t):** Tangente mit max. Steigung bei  $t = t_0 \rightarrow$  Tangente:  $2f_g$

höhere Grenzfrequenz  $\rightarrow$  Signaländerung rascher

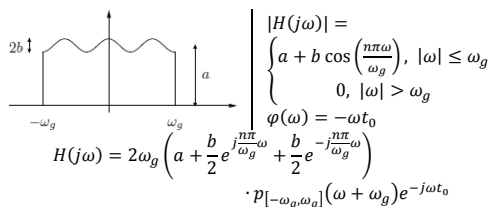
Gibbs-Phänomen: 9% Überschwingung

**Kausalität:**  $h(t)$  nach rechts verschieben und für  $t < 0$  zu Null setzen.

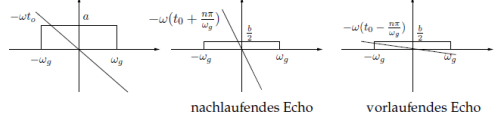


$H_{stab}(j\omega) = (H_{id} * H_{gl})(j\omega)$   
 $h_{stab}(t) = h_{id}(t) * h_{gl}(t) \approx \frac{1}{t - t_0} \frac{1}{t}$

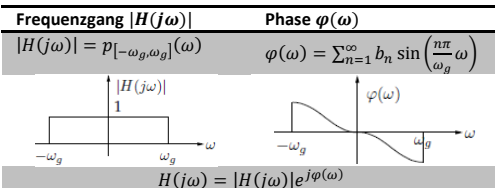
### TIEFPASS: IDEALER COSINUSTIEFPASS



Als Parallelschaltung von idealen Tiefpassfiltern mit lin. Phase:



### TIEFPASS: IDEAL, MIT PHASENVERZERRUNG



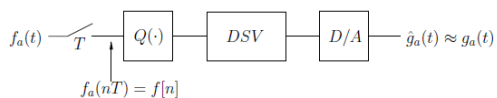
### TIEFPASS: ZUSAMMENFASSUNG

**Betragschwankungen** im Frequenzgang führen in der Impulsantwort zu symmetr. liegenden, vor- und nacheilenden Echos von gleicher Amplitude und gleichem Vorzeichen.

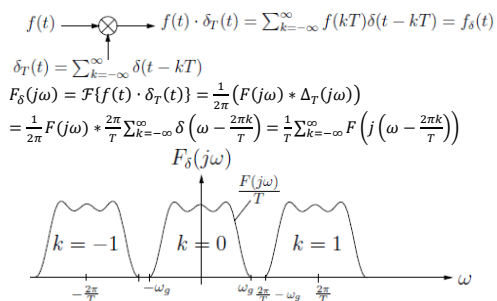
**Phasenschwankungen** im Frequenzgang führen in der Impulsantwort zu symmetr. liegenden, vor- und nacheilenden Echos gleicher Grösse, aber mit verschiedenem Vorzeichen.

### ABTAST-THEOREME

#### IMPLEMENTIERUNG DIGITALER SYSTEME

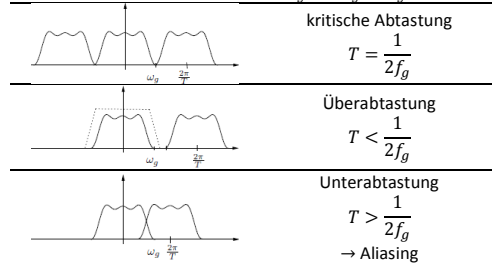


#### IDEALISIERTE ABTASTUNG



Die  $F(j\omega)$  dürfen sich nicht überschneiden. Also:

$$\frac{2\pi}{T} - \omega_g \geq \omega_g \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_g \Leftrightarrow T \leq \frac{\pi}{\omega_g} = \frac{1}{2f_g}$$



Optimale Abtastfrequenz (Nyquistrate):

$$f_s \geq 2f_g$$

Bandbreite: einseitig:  $BW = 2\pi f_g = \omega_g$

### ZEITDISKRETE SIGNALE

#### ABTASTUNG & FT ZEIT-DISKRETER SIGNALE

**Transformation:**  $F(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-jn\theta}$

**Rücktrafo:**  $f[n] = f(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta$

**Relative Freq.:**  $\theta = \omega T = 2\pi f T = 2\pi \frac{f}{f_s}$

#### EIGENSCHAFTEN DER ZEIT-DISKRETE FT

**Existenz:**  $|F(e^{j\theta})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]| < \infty$

**2π-Periodizität:**  $F(e^{j(\theta+2\pi)}) = F(e^{j\theta})$

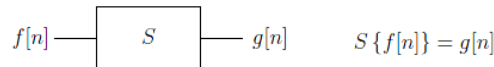
**Spektrum:**  $F(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{kont}(j(\frac{\theta-2k\pi}{T}))$   
mit  $-\pi < \theta \leq \pi$ ,  $-\frac{f_s}{2} < f \leq \frac{f_s}{2}$

**Period. Faltung:**  $x[n]y[n] \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\theta-\omega)}) d\omega$   
Achtung: Faltung 2π-periodisch!

#### EINIGE ZEIT-DISKRETE FT

$\delta[n]$	1
$\sigma[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\theta + 2\pi k)$
$e^{j\theta_0 n}$	$\frac{2\pi \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0)}{\pi \delta_{2\pi}(\theta)}$
$\sin(\theta_0 n)$	$\frac{\pi}{2} \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) - \frac{\pi}{2} \delta_{2\pi}(\theta + \theta_0)$
$\cos(\theta_0 n)$	$\pi \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) + \pi \delta_{2\pi}(\theta + \theta_0)$
$\sigma[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$ , $\delta[n] = \sigma[n] - \sigma[n-1] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	

### ZEITDISKRETE SYSTEME



#### SYSTEMEIGENSCHAFTEN

**Linearität:**  $S\{f_1[n] + f_2[n]\} = S\{f_1[n]\} + S\{f_2[n]\}$   
 $S\{\alpha f[n]\} = \alpha S\{f[n]\}$

**Zeitinvarianz:**  $S\{f[n]\} = g[n] \Rightarrow S\{f[n - n_0]\} = g[n - n_0]$

**Gedächtnis:** gedächtnislos, iff  $S\{f[n_0]\} = \text{funkt}(f[n_0])$

**Stabilität:** wenn  $|f[n]| < \infty \Rightarrow |g[n]| < \infty$

**Invertierbar:** wie bei analog

**Kausalität:** wie bei analog

**Realisierbar:** wie bei analog

#### ZEITDISKRETE LTI-SYSTEME

Impulsantw.:  $h[n] = S\{\delta[n]\}$ ,  $g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]$

Sprungantw.:  $a[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n-k]$   
Im Freq.-Ber.:  $G(e^{j\theta}) = F(e^{j\theta})H(e^{j\theta})$

$$\delta[n] = \sigma[n] - \sigma[n-1] \Rightarrow h[n] = a[n] - a[n-1]$$

Systemeigenschaften:

Parallelschaltung: wie analog  
Serienschaltung: wie analog  
Stabilität:  $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$   
Kausalität:  $\Leftrightarrow h[n] = 0 \forall n < 0$  (wie analog)  
Gedächtnis: gedächtnislos, wenn  $h[n] = 0 \forall n \neq 0$

**Beschreibung von LTI-Systemen über Differenzgleichungen:**  
Elemente:

Addition	Multiplikation	Zeitverzögerung
$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$	$x[n] \rightarrow a \rightarrow ax[n]$	$x[n] \rightarrow z^{-1} \rightarrow x[n-1]$

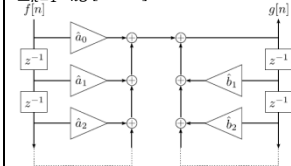
Differenzen-Gl.:

$$\sum_{k=0}^N a_k g[n-k] = \sum_{m=0}^M \tilde{b}_m f[n-m]$$

$$\sum_{m=0}^M \tilde{a}_m g[n-k]$$

Realisierung:

$$g[n] = \sum_{m=0}^M \tilde{b}_m f[n-m] + \sum_{k=1}^N \tilde{a}_k g[n-k]$$



Koeff.-Umrechnung:  
 $\tilde{a}_k = -\frac{a_k}{a_0}$ ,  $\tilde{b}_m = \frac{b_m}{a_0}$

Faltung, wenn:  
 $\tilde{a}_k = 0 \forall k$

#### Z-TRANSFORMATION

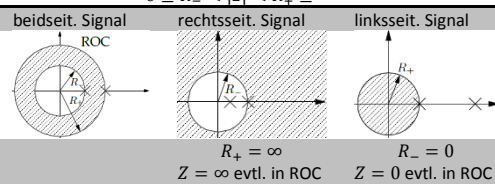
$$Z\{z[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Betracht. als FT:

$$X(z) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n} e^{-jn\theta}$$

Rücktransform.:  $x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz$

**Konvergenz:** ROC:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$   
 $0 \leq R_- < |z| < R_+ < \infty$



Signal endl. Länge: ROC = gesamte z-Ebene mit evtl.

Ausnahmen bei  $z=0$  oder  $z=\infty$ .

Wichtige Eigenschaften:

Linearität	$ax[n] + by[n]$	$aX(z) + bY(z)$
Zeitverschiebung	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$
Faltung	$x[n] * h[n]$	$X(z)H(z)$

Anwendung auf zeitdiskrete LTI-Systeme:

BIBO-Stabilität:  $\Leftrightarrow$  Einheitskreis  $\in$  ROC

Kausalität:  $\Rightarrow h[n]$  re-seitig  $\Leftrightarrow$  ROC mit grösstem Betrag

**IIR-System:**  $h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^N A_k d_k^n \sigma[n]$ ,  
kausal,  $H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$

**FIR-System:**  $H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$ ,  $h[n] = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Zusam.-schalt.: wie analog

### DISKRETE & SCHNELLE FT

#### DISKRETE FOURIER-TRANSFORMATION

Ausgangslage: Signal  $x[n]$  endlicher Länge  $N$

Periodisierung:  $\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$

Als F-Reihe:  $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Umkehrformel:  $\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

Definition Diskrete Fouriertransformation:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

DFT als Matrix:

$$\begin{bmatrix} X(e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot 0}) \\ X(e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot 1}) \\ \vdots \\ X(e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot (N-1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot (N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 2(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot (N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

#### FALTUNG MIT DER DFT

Zyklische Faltung:

$$(\tilde{x}_1 * \tilde{x}_2)(l) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n] \tilde{x}_2[l-n] \Leftrightarrow \tilde{X}_1 \tilde{X}_2$$

Lineare Faltung:

Ausgangslage:  $x_1[n] = 0 \forall (n < 0) \vee (n > L-1)$

$x_2[n] = 0 \forall (n < 0) \vee (n > P-1)$

Ziel:  $x_3[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1[l] x_2[n-l]$ ,  $0 \leq n \leq N-1$   
 $x_3[n]$  hat Länge  $L+P-1$

- kein Aliasing:  $N \geq L+P-1$

Eigenschaften:

i. Zero-Padding d. Signale  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  auf Länge  $N \geq L+P+1$

ii. Berechnen  $N$ -Punkt DFT von  $x_1[n]$  und  $x_2[n]$

iii. Produkt berechnen:  $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ ,  $0 \leq k \leq N-1$

iv. Inverse DFT  $\tilde{x}_3[n] = \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_1[l] \tilde{x}_2[n-l]$

Weil  $N \geq L+P+1$ , ist  $\tilde{x}_3[n]$  für  $0 \leq n \leq N-1$  die lin. Falt.

#### SCHNELLE FOURIER-TRANSFORMATION

$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \omega_N^{kn}$ ,  $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \omega_N^{-kn}$ ,  $\omega_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$   
 $N$  kompl. Add.,  $N$  kompl. Mult. zur Berechn. von  $X[k]$  für ein  $k$ .  
 $\Rightarrow$  Gesamtaufwand =  $N^2$  Multiplikationen +  $N^2$  Additionen.

Prinzip: Zerlegung der DFT mit Länge  $N$  in kleine DFTs

Annahme:  $N = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$

Umformung:  $X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] \omega_N^{kn}$   
 $= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] (\omega_N^k)^{rk} + \omega_N^{N/2-k} \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] (\omega_N^k)^{rk}$

spez. Umform.:  $\omega_N^k = \omega_{N/2}$

es folgt:  $X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] \omega_{N/2}^{rk} + \omega_N^{N/2-k} \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] \omega_{N/2}^{rk}$   
 $= G[k] + \omega_N^k H[k]$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$

nun gilt:  $G[k] = G[k + N/2]$ ,  $H[k] = H[k + N/2]$   
 Schlüsseldl.:  $X[k] = G[k] + \omega_N^k H[k]$   
 Durch einen solchen Vereinfachungsschritt ergeben sich folgende Komplexitäten, weil „nur“ zwei  $N/2$  DFTs zu ber. sind:  
 $C_{total} = 2 \left( \left(\frac{N}{2}\right)^2 \text{Add.} + \left(\frac{N}{2}\right)^2 \text{Mult.} \right) + N \text{Add.} + N \text{Mult.}$   
 So ergibt sich für  $C(\text{Add.}) = C(\text{Mult.}) = 1$  die **Komplexität**:  
 $C = N \log_2 N$   
 statt wie zuvor  $C = N^2$ .

## ENTWICKLUNG VON SIGNALEN IN ONS

### ORTHOGONALE TRANSFORMATION

Seien  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  und  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_N\}$  zwei ONS in  $\mathbb{C}^N$ .  
 Es gilt nun für beliebige Vektoren  $\underline{x} \in \mathbb{C}^N$ :

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^N \langle \underline{x}, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^N \langle \underline{x}, e'_i \rangle e'_i$$

Für die Beziehungen zwischen den Koeff.  $\lambda_i$  und  $\lambda'_i$  gilt:  
 $\lambda'_i = \langle \underline{x}, e'_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^N \lambda_j e_j, e'_i \rangle = \sum_{j=1}^N \lambda_j \langle e_j, e'_i \rangle$  und  
 $\lambda_i = \langle \underline{x}, e_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^N \lambda'_j e'_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^N \lambda'_j \langle e'_j, e_i \rangle$

Abb. eines Vektors  $\underline{x}$  im ONS  $\{e_i\}_{i=1}^N$  ins ONS  $\{e'_i\}_{i=1}^N$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle e_1, e'_1 \rangle & \langle e_2, e'_1 \rangle & \dots & \langle e_N, e'_1 \rangle \\ \langle e_1, e'_2 \rangle & \langle e_2, e'_2 \rangle & \dots & \langle e_N, e'_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_1, e'_N \rangle & \langle e_2, e'_N \rangle & \dots & \langle e_N, e'_N \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{C}^{N \times N}$

Analog definieren wir für die umgekehrte Abb. die Matrix  $B$ .  
 Aus  $\underline{x}' = A \underline{x}$  und  $\underline{x} = B \underline{x}'$  folgt  $\underline{x} = B A \underline{x} \Rightarrow BA = I$   
 Aus  $\langle e_j, e_j \rangle^* = \langle e_j, e_j \rangle$  folgt  $B = A^H$  wobei  $A^H := (A^T)^*$   
 Es gilt demnach  $A^H A = I$ , deshalb nennt man  $A$  unitär.  
 Für unitäre Matrizen gilt:  $\det(A^H A) = |\det(A)|^2 = 1$   
 weil  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$  und  $\det(A^H) = (\det(A))^*$   
 Eine unitär Transformation ist normtreu, d.h., definiert man

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}, \text{ so gilt für unitäres } A: \|A \underline{x}\| = \|\underline{x}\|$$

Anm.:  $(A \underline{x})^H = \underline{x}^H A^H$  und  $\underline{x}^H \underline{x} \in \mathbb{R}$

### ENTWICKLUNG VON FUNKTIONEN IN ONS

Betrachtung des Raumes der Fkt. für die  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ .  
 Diesen Raum bezeichnen wir als  $L^2(\mathbb{R})$ . Für  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt, \quad \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}$$

Zwei Funtk.  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  sind orthogonal, wenn  $\langle f, g \rangle = 0$ .  
 Es gilt:  $\dim(L^2(\mathbb{R})) = \infty$ .

Ein ONS für  $L^2(\mathbb{R})$  ist ein Set von Funktionen  $\{e_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$  so dass  
 $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Eine belieb. Funtk. kann im ONS  $\{e_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$  dargestellt werden:  
 $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i(t)$

Um zu zeigen, dass jede Funktion  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  so dargestellt werden kann, genügt es zu zeigen, dass:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f(t) - \sum_{i=1}^N \langle f, e_i \rangle e_i(t)\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|f\|^2 - \sum_{i=1}^N |\langle f, e_i \rangle|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N |\langle f, e_i \rangle|^2 = \|f\|^2$$

Ein solches ONS  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  heisst **vollständig** auf  $L^2(\mathbb{R})$ , als wenn:  
 $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle|^2 = \|f\|^2, \quad \forall f(t) \in L^2(\mathbb{R})$

### FT ALS ENTWICKLUNG IN EIN ONS

### FOURIER-REIHEN ALS ENTW. IN EIN ONS

### ABTASTTHEOREM ALS ENTW. IN EIN ONS

Interpolation:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin(\omega_g(t-kT))}{\omega_g(t-kT)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k(t)$$

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(\omega_g(t-kT))}{\omega_g(t-kT)}$$

- $\langle e_k, e_\ell \rangle = \begin{cases} 1, & k = \ell \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(kT) = \langle f, e_k \rangle$
- Vollständigkeit:  $\|f\|^2 = \sum_k |\langle f, e_k \rangle|^2$

$$c_k(t) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-jkT\omega} \delta_{[-\omega_g, \omega_g]}(\omega)$$

blabla

### ZEITDISKRETE FT ALS ENTW. IN EIN ONS

### DISKRETE FT ALS ENTW. IN EIN ONS

### ANDERES MATH

**Unitäre Matrix:** Rotation des Koordinatensystems  
 Spalten orthonormal, komplexes Analogon zu orthogonalen M.

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

**Euler'sche Relationen:**

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

**Integralsinusfunktion:**

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(u)}{u} du$$

**Sinc-Funktion**

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

**Argument-Regeln:**

$$\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b), \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

**Trigonometrische Regeln:**

$$\sin(\omega \pm \pi) = -\sin(\omega)$$

**Weitere Spezialfunktionen!!**

$$p_{[-\omega_q, \omega_q]}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_q \\ 0, & |\omega| > \omega_q \end{cases}$$

### ERINNERUNG PARTIALBRUCHZERLEGUNG

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = [X(s)(s+1)]_{s=-1} = 1$$

$$B = [X(s)(s+2)]_{s=-2} = -1$$

## PRÜFUNG

Folien für graphische Faltung (offizielle Empfehlung)

Laplace Trafo für analytische, RLC-Schaltkreise

Fourier Trafo für numerische Auswertung (wegen FFT)

**TODO:**

- Spezielle Bausteine aus Übungen (z.B. Phasenmodulator) inkl. Fourier-Transformierter
- Integralgrenzen bei  $\sigma$ -Funktionen
- D/C-Wandler digital-continuous
- Übungen & Prüfungen durchschauen

Faltung bei zeitdiskrete Transformation: von  $-\pi$  bis  $\pi$

Residuensatz!

### DRAFTS

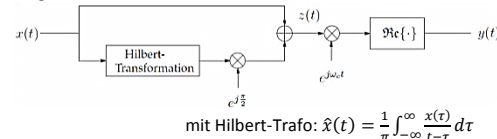
### MODULATIONEN

Amplituden-Mod.:  $y(t) = x(t) A_c \sin(\omega_c t + \phi_c)$   
 $\xrightarrow{F} Y(j\omega) = \frac{1}{2} [X(j(\omega + \omega_c)) - X(j(\omega - \omega_c))]$

Frequenz-Mod.:  $y(t) = A_c \sin((\omega_c + x(t))t + \phi_c)$

Phasen-Modulation:  $y(t) = A_c \sin(\omega_c t + x(t) + \phi_c)$

Single-Sideband-Modulation:



### ABTASTUNG

**Abtastung** (gehört zu Fourier-Reihen)

$$F(j\omega_0 k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0} + 2k\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0} + 2k\frac{\pi}{\omega_0}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} f(t') e^{-j(k-l)\omega_0 t'} dt'$$

$$2l \frac{\pi}{\omega_0} e^{-jk\omega_0 |t|} dt' = \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \left[ \sum_l f\left(t - 2l \frac{\pi}{\omega_0}\right) \right] e^{-jk\omega_0 t} dt =$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sum_l f(t - lT) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \hat{f}(t) e^{-hk\omega_0 t} dt$$

### TRICKS AUS DER PRÜFUNGSVORBEREITUNG

#### NEUES

**Allgemein:**

Dirac-Delta: Ableitungen von  $\delta$  durch partielle Int. lösen

Abtastung: unbedingt idealisierte Abtastung einführen

Abtaster,  $\frac{f_s}{2} \geq f_g$ :  $y[n] = x(nT)$ ,  $Y(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\theta - 2\pi k}{T}\right)\right)$

Einseitige Bandbreite: Breite d. Intervall für das  $Y \neq 0$ ,  $\omega > 0$

**Z-Transformation:**

Auflösung, Rücktransformation: Erweiterung mit  $z \mapsto \frac{1}{z}$

Realisierung: Ein- & Ausgangssig. einführen, mit Nenner mult.

### TRICKS & SO

Achsen beschriften!

Zeitvariant: g.d.w.  $S\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$

Gedächtnis:  $t := t_0$  setzen, argumentieren.

BIBO-Stabilität: Für  $|x[n]| \leq B < \infty$  gilt  $|y[n]| = \dots \leq f(B) < \infty$   
 Polynomdivision vor PBZ!

Bei PBZ für LT: Polstellen im komplex-konj.  $\rightarrow$  Ans.:  $\frac{Ax+B}{s^2+\alpha}$

ungerade-harmonisch: wenn  $c_k = 0 \forall$  geraden  $k$

Differenzen-Gleichung aus  $H(z)$ :

- Bruch wegmultiplizieren
- Beide Seiten mit  $z^2$  multiplizieren

Konvergenzgebiet Z-Trafo: umkehren mit  $\frac{1}{z}$ .

ROC L-Trafo:  $e^{-2t} h(t)$  nicht abs. int.  $\Rightarrow \sigma = 2 \notin \text{ROC}$

Trick: Funktion konstruieren durch Überlagerung von Sprungantworten und Impulsantworten

Gerader und unger. Teil einer Funktion:  $x(t) = x_g(t) + x_u(t)$

$$x_u(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \quad \text{und} \quad x_g(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

**Beispiel Konvergenzbereich bei Laplace-Rücktrafo:**

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+9}, \quad \sigma < -1$$

$$\Leftrightarrow X(-s) = \frac{-s+1}{(-s+1)^2+9} = \frac{-(s-1)}{(s-1)^2+9}, \quad \sigma > +1$$

$$\rightarrow x(-t) = -e^{-t} \cos(3t) \sigma(t) \Leftrightarrow x(t) = -e^{-t} \cos(3t) \sigma(-t)$$

**Rekonstruktion eines zeitdiskreten Signals:**

bei kritischer oder Überabtastung

$$G(j\omega) F_S(j\omega) = F(j\omega) \Rightarrow G(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g \end{cases}$$