ANALYSIS III

Zusammenfassung zur Vorlesung von
Prof. Dr. Knörrer

Lukas Cavigelli, Dezember 2010
lukasc@ee.ethz.ch

PDE

TRAFFIC FLOW EQUATION

$u(x,t) =$ Fahrzeugdichte zur Zeit t am Ort x
$F(x,t)$
$=$ #Fahrzeuge, die die Stelle x in einer Zeiteinheit passieren
Sei $[a,b]$ irgendein Interall.
#Autos zur Zeit t in $[a,b] = \int_a^b u(x,t)dx$
Satz der „Erhaltung der Anzahl der Autos":

$$\int_a^b u(x,t+\Delta t)dx - \int_a^b u(x,t)dx = \int_t^{t+\Delta t} F(a,\tau)d\tau - \int_t^{t+\Delta t} F(v,\tau)d\tau$$

$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{\Delta t}\big(u(x,t+\Delta t) - u(x,t)\big)dx$
$= \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} F(a,\tau)d\tau - \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} F(b,\tau)d\tau$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = F(a,t) - F(b,t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right]dx = 0, \qquad \forall a<b$$

Lemma:
Sei $h(x)$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, so dass $\int_a^b h(x)dx = 0\ \forall a<b$, dann ist $h \equiv 0$.

Beweis Lemma:
Gegenannahme: $\exists x_0 \in \mathbb{R}: h(x_0) \neq 0$
ObdA: $h(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: für $|x - x_0| < \varepsilon: h(x) > \frac{h(x_0)}{2}$
Setze $a := x_0 - \varepsilon, b := x_0 + \varepsilon \Rightarrow \int_a^b h(x)dx \geq \frac{2\varepsilon h(x_0)}{2} > 0$
$\rightarrow$ Widerlegt

Aus dem Lemma folgt:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0}$$

Modell: $F(x,t) = \tilde{F}\big(u(x,t)\big)$, $[u] = \frac{Autos}{km}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{F}\big(u(x,t)\big) = 0$$

http://math.mit.du/projects/traffic

HEAT EQUATION

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = k\Delta u$$

$u(x,y,z,t)$: Temperatur am Ort (x,y,z) zur Zeit t
k: Wärmeleitungskonstante

Physikalische Herleitung:
$D \subset \mathbb{R}^3$ Bereich mit glattem Rand, beliebig
Wärmeenergie in D zur Zeit t: $\int_D u(x,y,z,t)\,dV$
$\vec{B}(x,y,z,t)$ sei der Wärmefluss.
$u(x,y,z,t)$: Temperatur
Energieerhaltung: $\frac{1}{\Delta t}\int_D[u(x,y,t,(t+\Delta t)) - u(x,y,z,t)]dV = -\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_{\partial D}\vec{B}(x,y,z,\tau)\cdot d\vec{\omega}\right)d\tau$
$\lim_{\Delta t\to 0}: \int_D u_t\,dV = -\int_{\partial D}\vec{B}(x,y,z,t)\,d\vec{\omega}$
Postulat: $\vec{B} = -k\nabla u = -k\ grad\ u$

$$\int_D u_t\,dV = k\int_{\partial D}\nabla u\,d\vec{\omega} \xrightarrow{Gauss} k\int_D \nabla(\nabla u)\,dV = k\int_D \Delta u\,dV$$

$$\Rightarrow \int_D (u_t - k\Delta u)\,dV = 0\ \forall D$$

Wie vorhin folgt: $\boxed{u_t - k\Delta u = 0}$

Andere wichtige PDEs:
Wellengleichung: $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$
Laplace-Gleichung: $\Delta u = 0$
Real- und Imaginärteil analysischer Fkt erfüllen Laplace-Gl.
Bsp Laplace-Gl.: $u_{xx} = 0$ für Funktionen $u(x,y)$
$u(x,y) = A(y)x + B(y)$, $\quad A(y), B(y)$ beliebig
Bsp:

$$u_{xy} + u_x = 0$$

Setze $v = u_x \rightarrow v_y + v = 0 \rightarrow v = C(x)e^{-y}$
$u_x = C(x)e^{-y} \rightarrow u = D(x)e^{-y} + E(y)$
D Stammfunktion von C, E beliebig

TRENNUNG DER VARIABLEN

1D-WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

$$\boxed{u_t = ku_{xx}}$$

Randbedingung:	$u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0\ \forall t \geq 0$
Anfangsbedingung:	$u(x,t=0) = f(x)$ (gegebene Fkt)
Motivation:	lineare DGL $\rightarrow$ Superposition
Ansatz (Trenn. d. Var.):	Suche nach Lösungen der Form $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$
Einsetzen:	$X\cdot T_t = k\cdot X_{xx}\cdot T$
	$\Rightarrow \frac{T_t}{kT} = \frac{X_{xx}}{X} = -\lambda \Rightarrow \exists$ Konstante (EW)
Umkehrung:	$\exists\lambda\in\mathbb{R}, T(t), X(x): \frac{T_t}{kT} = -\lambda = \frac{X_{xx}}{X}$ so ist $u(x,t)$ eine Lösung der WLG
Gl. & Lsg für T:	$T' = -\lambda kT \Rightarrow T = Ae^{-\lambda kt}$
	$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = X(L) = 0$
Lsg für X mit $\lambda \neq 0$:	$X(x) = \beta\sin(\sqrt{\lambda}x) + \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x)$
... mit $\lambda = 0$:	$X(x) = a + bx$
RB $X(0) = 0$:	$\lambda \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0,\ \lambda = 0 \Rightarrow a = 0$
RB $X(L) = 0$:	$\lambda \neq 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \lambda_n = n^2\frac{\pi^2}{L^2}$
	$\lambda = 0 \Rightarrow bL = 0 \Rightarrow b = 0$, nur trivial
Lösung:	$\lambda_n = n^2\frac{\pi^2}{L^2},\ n = 1,2,3,\ldots$
	$X_n(x) = \beta_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$
	$T_n(t) = e^{-k\lambda_n t},\ n = 1,2,3,\ldots$
Linearität:	$\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)\,e^{-k\lambda_n t}$ ist auch Lösung der WLG mit den RB
Fourier-Reihe & AB:	$u(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} B_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$
	Wähle B_n die Fourier-Koeff. von $f(x)$
	Dazu f ungerade erweitern $\rightarrow$ sin

Plausibilität:	für $t\to\infty$: die Summanden $\to 0$. ok.

1D-WELLENGLEICHUNG

$$\boxed{u_{tt} = c^2u_{xx}}$$

Randbedingung:	$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$
Anfangsbedingung:	$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x)$
Ansatz:	$u(x,t) = X(x)T(t)$
Einsetzen:	$XT_{tt} = x^2X_{xx}T$
	$\Rightarrow \frac{T_{tt}}{c^2T} = \frac{X_{xx}}{X} = -\lambda$ (Konstante)
Suche λ, X, T:	$X'' = -\lambda X,\ X'(0) = X'(L) = 0$
	$T'' = -c^2\lambda T$
Lsg für $X(x)$ mit $\underline{\lambda \neq 0}$:	$X(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$
	$X'(x) = \sqrt{\lambda}\big(\alpha\sin(\sqrt{\lambda}x) - \beta\cos(\sqrt{\lambda}x)\big)$
RB links:	$X'(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$
RB rechts:	$X'(L) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$
	$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ X_n(x) = \alpha_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
Lsg für $X(x)$ mit $\underline{\lambda = 0}$:	$X(x) = a + bx,\ X'(x) = b$
RB:	$\Rightarrow b = 0,\ X_0(x) = a$

Superpos von sin & cos:

$$u_n(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(A_n\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$$

$$u_0(x,t) = A_0 + B_0t$$

$$u(x,t) = A_0 + B_0t + \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(A_n\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$\forall A_n, B_n$ so dass es konvergiert, eine Lsg, die die RB erfüllt.
Die AB best. A_n, B_n:
$f(x) = u(x,0) = A_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
$g(x) = u_t(x,0) = \cdots$
Dann Fourier.

1D-WELLENGLEICHUNG

HOMOGEN MIT FORMEL VON D'ALEMBERT

$$\boxed{u_{tt} = c^2u_{xx}, \qquad x\in\mathbb{R}, t\geq 0}$$

mit AB:	$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x)$
Idee:	$u(x,t) = F(x\pm ct)$
	$F_{xx} = F''(x\pm ct)$
	$F_{tt} = c^2F''(x\pm ct)$
Lösungsansatz:	$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ mit zu bestimmenden Funkt. F & G
AB einsetzen:	$u(x,0) = f(x) = F(x) + G(x)$
	$u_t(x,0) = g(x) = cF'(x) - cG'(x)$
Umformen & lösen:	$\Rightarrow F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_0^t g(s)ds + k$
	$\Rightarrow 2F(x) = f(x) + \frac{1}{c}\int_0^t g(s)ds + k$
	$\Rightarrow 2G(x) = f(x) - \frac{1}{c}\int_0^t g(s)ds - k$

$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct} g(s)ds + k + f(x-ct) - \frac{1}{c}\int_0^{x-ct} g(s)ds - k$

Formel von d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

HUYGENS-PRINZIP

BILD
$u(x_0,t_0)$ hängt nur von den Anfangsbedingungen im Interval $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ ab.
$\Leftrightarrow$ Die Wellen kann nur von Punkten beinflusst werden, die sie überhaupt erreicht haben kann in der vertrichenen Zeit.

INHOMOGENE 1D-WELLENGLEICHUNG

$$\boxed{u_{tt} - c^2u_{xx} = F(x,t)}$$

Anfangsbedingungen:	$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,t) = g(x)$
Huygens:	Δ =Dreieck mit den Ecken: $(x_0 - ct_0, 0),\ (x_0 + ct_0, 0),\ (x_0, t_0)$
	B: Basis,

$-\int_\Delta F(x,t)dxdt = \int_\Delta(c^2u_{xx} - u_{tt})dxdt$
$\xrightarrow{Green} \int_{\partial\Delta}(u_tdx + c^2u_xdt)$

Es gilt beim Dreieck:	$\partial\Delta = B\cup R\cup L$
Paramterisierung B:	$x = s,\ (s\in[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0])$
	$t = 0,\ dx = ds,\ dt = 0$

$\int_B u_tdx + c^2u_xdt = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} u_t(s,0)ds = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(s)ds$

Parametrisierung R:	$x = x_0 + ct_0 - c\tau,\ \tau\in[0,t_0]$
	$t = \tau,\ dt = d\tau,\ dx = -cd\tau$

$$\int_R u_tdx + c^2u_xdt = \int_0^{t_0}[u_t(x_0 + ct_0 - c\,\tau, t)(-c) + c^2u_x(x_0 + ct_0 - c\tau, \tau)]d\tau$$

$$= -\int_0^{t_0}\frac{d}{d\tau}\big(u(x_0 + ct_0 - c\tau, \tau)\big)d\tau$$

$$= -c[u(x_0 + ct_0 - ct_0, t_0) - u(x_0 + ct_0 - 0, 0)]$$

$$= -c[u(x_0,t_0) - u(x_0 + ct_0, 0)]$$

Analog für L:	$\int_L u_tdx + x^2u_xdt$
	$= c[f(x_0 - ct_0) - u(x_0,t_0)]$

$$\Rightarrow -\int_\Delta F(x,t)dxdt = \int_{B\cup L\cup R} u_tdx + c^2u_xdt$$

$$= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(s)ds + c[f(x_0 - ct_0) + f(x_0 + ct_0) - 2u(x_0,t_0)]$$

$$\Rightarrow u(x_0,t_0) = \frac{f(x_0 + ct_0) + f(x_0 - ct_0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_\Delta F(x,t)dxdt$$

Beispiel:

$$u_{tt} - 9u_{xx} = e^x + e^{-x} = F(x,t)$$

$$u(x,0) = x = f(x), \qquad c = 3$$

$$u_t(x,0) = \sin(x) = g(x)$$

$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_\Delta F(\xi,\tau)d\xi d\tau$
$=$
$\frac{1}{2}[x + 3t + x - 3t] + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}\sin(s)\,ds + \frac{1}{6}\int_0^t\int_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)}(e^\xi + e^{-\xi})d\xi\,d\tau = x + \frac{1}{3}\sin(x)\sin(t) + \frac{2}{9}\sinh(x)\,(\cosh(3t) - 1)$

FOURIERTRAFO FÜR WÄRMELEITUNGS-GL.

Wärmeleitungsgl.:	$u_t = \alpha\Delta u$
Wellengleichung:	$u_{tt} = c^2\Delta u$
Erinnerung 1D:	$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t)e^{ikx}$

WÄRMELEITUNGSGL. IN $\mathbb{R}^3$ - HERLEITUNG

AWP: $u_t = \alpha\Delta u,\ u(x,0) = f(x)$

FT bzgl. x: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}(k,t)e^{ikx}dk_{1\dots n}$

$$\Delta u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} -|k|^2\hat{u}(k,t)e^{ikx}dk_{1\dots n}$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{u_t}(k,t)e^{ikx}dk_{1\dots n}$$

Koeffizientenvergleich: $\hat{u}_t(k,t) = -\alpha|k|^2\hat{u}(k,t)\ \forall k$

Anfangsbed.: $\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$

Lösung der DGL in t: $\hat{u}(k,t) = e^{-\alpha|k|^2t}\hat{f}(k)$

Lösung des AWPs:

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(k)e^{-\alpha|k|^2t}e^{ikx}dk_{1\dots n}$$

WELLENGLEICHUNG IN $\mathbb{R}^3$ - HERLEITUNG

Anfangswertproblem: $u_{tt} = c^2\Delta u$

$u(x,0) = f(x)$

$u_t(x,0) = g(x)$

$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}_{tt}(k,t)e^{ikt}dk_{1..3}$

Koeffizientenvergl.: $\hat{u}_{tt}(k,t) = -c^2|k|^2\hat{u}(k,t)\ \forall k$

Anfangsbedingung: $\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k),\ \hat{u}_t(k,0) = \hat{g}(k)$

Lösung DGL in t:

$$\hat{u}(k,t) = A(k)\cos(|k|ct) + B(k)\sin(|k|ct)$$

Anfangsbedingung: $\hat{f}(k) = A(k),\ \hat{g}(k) = B(k)|k|c$

Lösung des AWPs:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\hat{f}(k)\cos(|k|ct) + \frac{\hat{g}(k)}{|k|c}\sin(|k|ct)\right)e^{ikx}dk$$

WÄRMELEITUNGSGL. IN $\mathbb{R}^3$ - VEREINFACHUNG

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{f}(k)e^{-\alpha|k|^2t}e^{ikx}dk$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x')e^{-ikx}dx'$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} dk\int_{\mathbb{R}^3} dx' f(x')e^{-\alpha|k|^2t+ik(x-x')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} dx' f(x')\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} dk\ e^{-\alpha t\left(|k|^2 - i\frac{k\cdot(x-x')}{\alpha t}\right)}}_{\int_{\mathbb{R}^3} dk\ e^{-\alpha t\left(k - i\frac{x-x'}{2\alpha t}\right)^2} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha^2t^2}}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} dx' f(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}\int_{\mathbb{R}^3} dk\ e^{-\alpha t\left|k - i\frac{x-x'}{2\alpha t}\right|^2}$$

$$\xrightarrow{Cauchy} \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} dx' f(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}\int_{\mathbb{R}^3} dk\ e^{-\alpha t|k|^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} dx' f(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}\int_{\mathbb{R}^3} dk\ e^{-\alpha t k_1^2}\ e^{-\alpha t k_2^2}\ e^{-\alpha t k_3^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} dx' f(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-\alpha t|k|^2}\right)^3$$

Daher:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3}\underbrace{K_t(x-x')f(x')}_{Faltung}dx'$$

wobei K_t der Wärmeleitungskern:

$$K_t(x-x') = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}}e^{-\frac{|x-x'|^2}{4\alpha t}}$$

FOURIER-TRAFO FÜR WELLENGLEICHUNG

WELLENGLEICHUNG IN $\mathbb{R}^3$ - VEREINFACHUNG

$u(x,t) =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{f}(k)\cos(|k|ct)\,e^{ikx}dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{g}(k)\frac{\sin(|k|ct)}{|k|c}e^{ikx}dk$

mit: $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x')e^{-ikx}dx'$ Fouriertransformierte

<u>Lemma</u>: Sei $S_R = \{y \in \mathbb{R}^3, |y| = R\}$ die Kugeloberfläche mit Radius R und $d\omega(y)$ das Oberflächenelement von S_R. Dann:

$$\frac{\sin(|k|R)}{|k|} = \frac{1}{4\pi R}\int_{S_R} e^{iky}d\omega(y), \qquad \forall k \in \mathbb{R}^3$$

<u>Beweise des Lemmas</u>:
Linke Seite der Formel ändert sich nicht, wenn man eine Drehung um 0 auf k ankendet. Auf die rechte Seite trifft die auch zu. Wir können als OBdA $k = (0,0,k_z)$ wählen. Dann ist:
$\frac{1}{4\pi R}\int_{S_R} e^{iky}d\omega(y) = \frac{1}{4\pi R}\int_{S_R} e^{ik_zy_z}d\omega(y) =$
$\xrightarrow{Kugelkoord} \frac{1}{4\pi R}\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik_zR\cos(\theta)}\sin(\theta)\,R^2 =$
$\frac{R}{2}\int_0^{\pi} e^{ik_zR\cos(\theta)}\sin(\theta)\,d\theta = -\frac{1}{2ik_z}\int_0^{\pi}\frac{d}{d\theta}\left(e^{ik_zR\cos(\theta)}\right)d\theta =$
$-\frac{1}{2ik_z}\left[e^{ik_zR\cos(\pi)} - e^{ik_zR\cos(0)}\right] = \frac{1}{k_z}\frac{e^{ik_zR}-e^{-ik_zR}}{2i} =$
$\frac{1}{k_z}\sin(k_zR) = \frac{1}{|k|}\sin(|k|R)$

<u>Zweiter Term</u> in der Lösungsformel:
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{g}(k)\frac{\sin(|k|ct)}{|k|c}e^{ikx}d\vec{k}$
$\xrightarrow{Lemma\ mit\ R=ct} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(d\vec{k}\hat{g}(k)\frac{1}{4\pi c^2t}e^{ikx}\int_{S_{ct}} e^{iky}d\omega(y)\right) =$
$\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{S_{ct}} d\omega(y)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}\ e^{ikx(x+y)}\ \hat{g}(k)}_{g(x+y)} = \frac{1}{4\pi c^2t}\int_{S_{ct}} g(x+y)d\omega(y)$

<u>Erster Term</u> in der Lösungsformel:
$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{f}(k)\frac{\sin(|k|ct)}{|k|c}e^{ikx}d\vec{k} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{S_{ct}} f(x+y)d\omega(y)\right)$

Das ergibt die Gesamtlösung: **Kirchhoff'sche Formel**:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{S_{ct}} f(\vec{x}+\vec{y})d\omega(\vec{y}) + \frac{1}{4\pi c^2t}\int_{S_{ct}} g(\vec{x}+\vec{y})d\omega(\vec{y})$$

Starkes Huygens-Prinzip:
$u(x,t)$ hängt nur von den Werten von f und g auf einer beliebig kleinen Umgebung von $\{z \in \mathbb{R}^3, |z-x| = ct\}$ ab.

Aus der Übung:
1. Für eine glatte Funktion $F: \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ und $g: D \to \mathbb{R}$ gilt:
$\int_{F(D)} g(\vec{y})d\omega(\vec{y}) = \int_D g(F(\vec{y}))\left|\frac{\partial F}{\partial y_1}\times\frac{\partial F}{\partial y_2}\right|dy_1dy_2$
2. Für 2D-Fall: $x_3 = 0$ und $y_3 = 0$ setzen. ACHTUNG

TEMPERATUR IM KELLER

$x = 0$: Erdoberfläche, x gegen unten

Löse: $u_t = Du_{xx}$ mit $D = 0.025\frac{cm^2}{sec}$ Diffusionskoeff. der Erde

Randwertproblem: $u(0,t) = T_0 + A\cos(\omega t)$ mit $\omega = \frac{1}{Jahr}$

Ansatz: $u(x,t) = T_0 + v(x)\cos(\omega t - kx)$
es sind $v(x), k$ zu bestimmen. RB: $v(0) = A$
$u_t = -\omega v(x)\sin(\omega t - kx) = Dv''(x)\cos(\omega t - kx) + 2Dv'(x)k\sin(\omega t - kx) - Dk^2v(x)\cos(\omega t - kx) = Du_{xx}$

Koeffizientenvergleich:
sin: $-\omega v(x) = 2Dkv'(x) \Leftrightarrow v'(x) = -\frac{\omega}{2Dk}v(x) \Rightarrow v''(x) = \frac{\omega^2}{4Dk^2}v(x)$, cos: $v''(x) = k^2v(x)$
$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{2Dk}\right)^2 = k^2 \Rightarrow \omega = 2Dk^2$
$\Rightarrow v'(x) = -kv(x) \Rightarrow v(x) = v(0)e^{-kx}$
Lösung: $u(x,t) = T_0 + Ae^{-kx}\cos(\omega t - kx),\ \omega = 2Dk^2$
Im Falle der Erde: $x = 5m \to kx = \pi, e^{-\pi} = \frac{1}{23} \to$ in 5 Meter Tiefe genau warm im Winter & kalt im Sommer.

LAPLACE-TRAFO FÜR WELLENGL. AUF $\mathbb{R}_{\geq 0}$

Anfangs-Randwertproblem für die Wellengl.

$$u_{tt} = c^2u_{xx}, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = f(t), \quad \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$$

Laplace-Trafo: $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

Heaviside: $H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Heaviside: $\mathcal{L}[H(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$

Ableitung: $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$

Ableitung 2.: $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)$

Verschiebungssatz: $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$

Sei $U(x,s)$ die Laplacetransformierte von u bzgl. der Zeit t:

$$U(x,s) = \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-st}dt$$

Wellengleichung: $s^2U(x,s) = c^2U_{xx}$
(denn $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$)

Löse für jedes s: $U_{xx} = \frac{s^2}{c^2}U$

Allgemeine Lösung: $U(x,s) = A(s)e^{-sx/c} + B(s)e^{sx/c}$

Da $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$, ist $\lim_{x\to\infty} U(x,s) = 0 \Longrightarrow B(s) = 0$
Da $u(0,t) = f(t)$, ist $U(0,s) = A(s) = \mathcal{L}[f](s)$

$$\Longrightarrow U(x,s) = e^{-sx/c}\mathcal{L}[f](s)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = H\left(t - \frac{x}{c}\right)f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{c}\right), & x \leq ct \\ 0, & x > ct \end{cases}$$

METHODE DER CHARAKTERISTIKEN

Lineare partielle DGL 1. Ordnung:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c_0(x,y)u + c_1(x,y)$$

Gegeben: $a(x,y), b(x,y), c_0(x,y), c_1(x,y)$

Gesucht: $u(x,y)$

Gegeben seien die Anfangswerte auf einer paramtrisierten Kurve $s \mapsto (x_0(s), y_0(s))$ in $\mathbb{R}^2$ durch die Bedingung $u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s)$.

Anfangskurve: $\Gamma(s): s \mapsto (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$

Der Graph einer Lösung u ($\{(x,y,v)|v = u(x,y)\}$) ist eine Fläche, die die Anfangskurve enthält. (Lösungsfläche)
Gleichung der Fläche ist $F(x,y,v) = v - u(x,y) = 0$.

$$\nabla F = (-u_x; -u_y; 1)$$

Ein Normalenvektor an die Lösungsfläche im Punkt $(x,y,u(x,y))$ ist $(u_x; u_y; -1)$. Die DGL lässt sich schreiben als $(a; b; c_0u + c_1)\cdot(u_x; u_y; -1) = 0$. D.h. $(a; b; c_0u + c_1)$ ist senkrecht zum Normalvektor, also ein Tangentialvektor an die Lösungsfläche.

D.h. $\begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \\ c_0(x,y)u + c_1(x,y) \end{pmatrix}$ im (x,y,u)-Raum
ist ein Vektorfeld, das tangential zur Lösungskurve ist.
Bestimme durch jeden Punkt der Anfangskurve $\Gamma(s)$ die Integralkurve dieses Vektorfeldes. Diese Inteegralkurve überdecken (einen Teil) der Lösungsfläche.
Integralkurve des Vektorfeldes sind Lösungen der charakteristischen Gleichungen: $\frac{\partial x}{\partial t} = a(x,y), \frac{\partial y}{\partial t} = b(x,y), \frac{\partial u}{\partial t} = c_0(x,y)u + c_1(x,y)$.
Eine Parametrisierung eines Teils der Lösungsfläche erhält man, in dem man für jedes s löst:

Die charakt. Gleichungen:

$$x_t = 0, \quad y_t = b, \quad u_t = c_0u + 1$$

mit Anfangsbedingungen:

$$x(0,s) = x_0(s), \quad y(0,s) = y_0(s), \quad u(0,s) = u_0(s)$$

Mögliche Probleme:
1. Die Lösungen der char. Gleichungen können Singularitäten entwickeln (in endlicher Zeit).
2. Man bekommt erst mal eine Parametrisierung der Lösungsfläche durch (s,t) und muss dann nach (x,y) auflösen. Das ist nicht immer möglich. Lokal ist es möglich, falls die Jacobi-Determinante $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} \neq 0$. Das Problem könnte sogar auf der Anfangskurve Γ_0 auftreten. Dort ist $y = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{\partial x_0}{\partial s} & \frac{\partial y_0}{\partial s} \end{pmatrix}$.
Die Methode das Charakteristiken funktioniert lokal um die Anfangskurve, falls
$J(s) = \det\begin{pmatrix} a(x_0(s), y_0(s)) & b(x_0(s), y_0(s)) \\ \frac{\partial x_0}{\partial s} & \frac{\partial y_0}{\partial s} \end{pmatrix}$ nirgends null ist.
3. Integralkurve der Vektorfelder könnten Anfangskurve mehrmals treffen.

BSP.: METHODE DER CHARAKTERISTIKEN

Bsp.: $u_x + u_y = 2$

AB: $u(x,0) = x^2$

$x_0(s) = s,\ y_0(s) = 0,\ u_0(s) = s^2$

Char. Gleichungen: $x_t = 1,\ y_t = 1,\ u_t = 2$

Anfangsbedingungen: $x(0,s) = s,\ y(0,s) = 0,\ u(0,s) = s^2$

Parametrisierung der Lösungsfläche:

$$x(t,s) = s + t, \quad y(t,s) = t, \quad u(t,s) = 2t + s^2$$

Kehre die Koordinatentransformation $(s,t) \mapsto (x,y)$ um, um die Lösung zu erhalten:

$$t = y, \quad s = x - y$$

$$u(x,y) = u(t(x,y), s(x,y)) = 2y + (x-y)^2$$

$$\Rightarrow u(x,y) = 2y + (x-y)^2$$

METHODE DER CHARAKTERISTIKEN (WH)

QUASILINEARE PARTIELLE DGL

$$\boxed{a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)}$$

(Letztes Mal: $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c_0(x,y) + c_1(x,y)u$)

Anfangsbed.: $u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s)$ wobei $x_0(s), y_0(s), u_0(s)$ gegeben.

Param. der Lösungsfl.: versucht man, durch lösen der charakteristischen Gleichungen $x_t = a(x,y,u),\ y_t = b(x,y,u)$ und $u_t(x,y,u)$ zu erhalten.

für $x(t,s),\ y(t,s),\ u(t,s)$ mit AB $x(t=0,s) = x_0(s)$, $y(t=0,s) = y_0(s),\ u(t=0,s) = u_0(s)$

Def.: die Projektionen der Lösungskurven der charakteristischen Gleichungen in die (x,y)-ebene heissen **Charakteristiken**.

Im linearen Fall sind die DGLs für die Charakteristiken $x_t = a(x,y),\ y_t = b(x,y)$ entkoppelt von der DGL für u, im Allgemeinen nicht.

Man kann eine lokale Lösung erwarten, wenn die Transversalitätsbedingung erfüllt ist.

Def.: **Transversalitätbedingung**:

$$J = \det\begin{pmatrix} a(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) & b(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) \\ (x_0)_s & (y_0)_s \end{pmatrix} \neq 0$$

BSP: QUASILIN. PDE MIT METH. D. CHARAKT.

$u_x = 1$ mit AB $u(0,y) = g(y)$ mit $g(y)$ gegeben, z.B. $e^{\sin(y)}$.

$a = 1, b = 0, c = 1, \quad x_0(s) = 0, y_0(s) = s, u_0(s) = g(s)$

Char. Gleichungen: $x_t = 1,\ x(0,s) = 0$

(DGL für Charakterist.) $y_t = 0,\ y(0,s) = s$

$u_t = 1,\ u(0,s) = g(s)$

Transversalitätsbedingung:

$$J = \det\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Charakteristiken:

$$x(t,s) = t + c_1(s) = t, \qquad y(t,s) = c_2(s) = s$$
$$u(t,s) = t + c_3(s) = t + g(s)$$

Koordinatenwechsel zwischen (x,y) und (s,t):

$$x = t, y = s$$

Einsetzen in die Gleichung für u:

$$u(x,y) = x + g(y)$$

Fertig.

MODIFIKATION DES PROBLEMS:

neue Anfangsbed.: $u(x,0) = x^2$

Kann nicht gut gehen!!

$$x_0(s) = s, \qquad y_0(s) = 0, \qquad u_0(s) = s^2$$

$J = \det\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0 \to$ Transversalitätsbed. verletzt!

$u_x(x,0) = 2x$: DGL bereits durch AB verletzt!

BSP: HOM. LIN. PDE 1. ORDNUNG

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$

Charakteristiken: $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}$

3. Char. Gl. besagt: u konst. über den Charakteristiken

BSP: BLABLA

$$u_x + u_y + u - 1 = 0$$

mit AB: $u = \sin(x)$ auf der Kurve $y = x + x^2$

$$\to a = 1, b = 1, c(x,y,u) = -u + 1$$
$$x_0(s) = s, \qquad y_0(s) = s + s^2, \qquad u_0(s) = \sin(s)$$

Transversalitätsbdeingung:

$J = \det\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1+2s\end{pmatrix} = 2s \to$ Problem bei $s = 0$

Charakteristische Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} x_t = 1, \quad & x(0,s) = s \\ y_t = 1, \quad & y(0,s) = s + s^2 \end{aligned}\right\}\text{Charakteristiken}$$
$$u_t = -u + 1, \qquad u(0,s) = \sin(s)$$

Daraus folgt:

$$x = t + c_1(s) = t + s$$
$$y = t + c_2(s) = t + s + s^2$$
$$u = (\sin(s) - 1)e^{-t} + 1$$

Param. d. Lösungsfl.:

$$x(t,s) = t + s, \qquad y(t,s) = t + s + s^2$$
$$u(t,s) = 1 + (\sin(s) - 1)e^{-t}$$

Umkehrung der Abb.:

$$s = \sqrt{y - x}, \qquad t = x - s = x - \sqrt{y - x}$$
$$u(x,y) = 1 + \left(\sin\left(\sqrt{y-x}\right) - 1\right)e^{\sqrt{y-x}-x}$$

BSP 2.6:

$$-yu_x + xu_y = u, \qquad u(x,0) = \psi(x)$$
$$a = -y, \qquad b = x, \qquad c = u$$
$$x_0(s) = s, \qquad y_0(s) = 0, \qquad u_0(s) = \psi(s)$$

Charakteristiken: $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = -\frac{x}{y} \to$ Lösung: Kreise

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \to x_{tt} = -y_t = -x$$

Lösung: $\begin{pmatrix}x(t,s) \\ y(t,s)\end{pmatrix} = f_1(s)\begin{pmatrix}\cos(t) \\ \sin(t)\end{pmatrix} + f_2(s)\begin{pmatrix}\sin(t) \\ \cos(t)\end{pmatrix}$

Einsetzen AB: $f_2(s) = 0,\ f_1(s) = s$

Charakteristiken: $x(t,s) = s\cos(t)$

$y(t,s) = s\sin(t)$

3. char. Gleichung: $u_t = u \to u(t,s) = e^t\psi(s)$

$\begin{pmatrix} x = s\cos(t) \\ y = s\sin(t) \\ u = e^t\psi(s) \end{pmatrix} \leftarrow$ Paramter. der Lösungsfläche

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad t = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$u(x,y) = \psi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

BURGER'SCHE GLEICHUNG (EULER-GL.)

Spezialfall einer Erhaltungsgleichung ($u_y + \frac{\partial}{\partial x}F(u) = 0$)

$$\boxed{u_y + uu_x = 0 \Leftrightarrow u_y + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^2 = 0} \qquad AB: u(x,0) = h(x)$$

Quasilinear, 1.Ordnung

$$a = u, b = 1, c = 0, x_0(s) = s, y_0(s) = 0, u_0(s) = h(s)$$

Charakt. Gleichungen:

$$x_t = u, \qquad y_t = 1, \qquad u_t = 0$$
$$x(0,s) = s, \qquad y(0,s) = 0, \qquad u(0,s) = h(s)$$

Daraus folgt:

$u(t,s) = h(s)$, d.h. u ist konstant auf den Charakteristiken.

$$y(t,s) = t, \qquad x(t,s) = s + h(s)t$$

Umkehrung der Koordinaten-Transformation ?!?

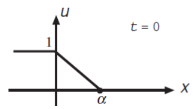
Charakteristiken: $x(t,s) = s + h(s)t,\ y(t,s) = t$

$$x = s + h(s)y, \qquad y = -\frac{s}{h(s)} + \frac{1}{h(s)}x$$

Problem, falls $h'(s) > h(s)$, weil sich Charakteristiken schneiden.

Bsp.:

$$h(s) = \begin{cases} 1, & s \leq 0 \\ 1 - \frac{s}{\alpha}, & 0 \leq s \leq \alpha \\ 0, & s \geq \alpha \end{cases}$$



Für $y = 0$, (nicht $t = 0$)

Schnittpunkt der Charakteristiken in (α, α) für die Charakteristiken, die durch $(0 \leq x \leq \alpha, 0)$ gehen.

Für $x > \alpha$ sind die Charakteristiken senkrecht.

Bis $y = y_c = \alpha$ funktioniert die Methode der Charakteristiken gut.

$$u(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{x-\alpha}{y-\alpha}, & y < x < \alpha \\ 0, & x \geq \alpha \end{cases}$$

Dann ist $x = s + \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)y$. So ist $\frac{x-\alpha}{y-\alpha} = 1 - \frac{s}{\alpha} = h(s)$, also ist u konstant auf den Charakteristiken.

$[a,b]$ beliebiges Intervall in x, so gilt: (Integr. d. PDE)

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b u(\xi,y)d\xi + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial u^2}{\partial x}(\xi,y)d\xi = 0$$

schwache Formulierung der PDE, Erhaltungsgesetz:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b u(\xi,y)d\xi + \frac{1}{2}[u(b,y)^2 - u(a,y)^2] = 0$$

Suche nach Lösungen der schwachen Formulierung.

Für unser Beispiel: für $y > y_c = \alpha$ ist

$$u(x,y) = \begin{cases} 1, & x < \alpha + \frac{1}{2}(y - \alpha) \\ 0, & x > \alpha + \frac{1}{2}(y - \alpha) \end{cases}$$

eine schwache Lösung.

Das ist in der Tat eine schwache Lösung. Sei $[a,b]$ ein Intervall, das $y + \frac{1}{2}(y - \alpha)$ enthält.

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b u(\xi,y)d\xi = \int_a^{\alpha+\frac{1}{2}(y-\alpha)} 1 d\xi = \alpha + \frac{1}{2}(y - \alpha) - a$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\int_a^b u(\xi,y)d\xi = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}\Big[\underbrace{u(b,y)^2}_{0} - \underbrace{u(a,y)^2}_{1}\Big] = -\frac{1}{2}$$

Unstetigkeit der Lösg. längs $x = \gamma(y) = \alpha + \frac{1}{2}(y - \alpha),\ y > \alpha$

Wie kommt man auf die schwache Lösung? Nehmen an, es gebe eine Kurve $x = \gamma(y)$ längs deren die Lösung unstetig ist (nur Sprungstelle), und sonst diff'bar. Fixiere y und $a < \gamma(y) < b$.

Schwache Formulierung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_a^{\gamma(y)} u(\xi,y)d\xi + \int_{\gamma(y)}^b u(\xi,y)d\xi\right]$$
$$+ \frac{1}{2}(u(b,y)^2 - u(a,y)^2) = 0$$

Setze $u^- = u^-(y),\ u^+ = u^+(y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial\gamma}{\partial y}(y)u^- - \frac{\partial\gamma}{\partial y}u^+ + \int_a^{\gamma(y)} u_y(\xi,y)d\xi + \int_{\gamma(y)}^b u_y(\xi,y)d\xi$$
$$+ \frac{1}{2}[u(b,y)^2 - u(a,y)^2] = 0$$

Weil $u_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}u^2\right)$

$$\gamma_y(u^- - u^+) - \frac{1}{2}\int_a^{\gamma(y)} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(u(\xi,y)\right)^2 d\xi$$
$$- \frac{1}{2}\int_{\gamma(y)}^b \frac{\partial}{\partial\xi}\left(u(\xi,y)\right)^2 d\xi$$
$$+ \frac{1}{2}[u(b,y)^2 - u(a,y)^2] = 0$$

$$\gamma_y(u^- - u^+) - \frac{1}{2}((u^-)^2 - u(a,y)^2) - \frac{1}{2}(u(b,y)^2 - (u^+)^2)$$
$$+ \frac{1}{2}(u(b,y)^2 - u(a,y)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_y(u^- - u^+) = \frac{1}{2}((u^-)^2 - (u^+)^2) \Rightarrow \gamma_y = \frac{1}{2}(u^- + u^+)$$

ERHALTUNGSGLEICHUNG

$$\boxed{u_y + \frac{\partial}{\partial x}F(u) = 0}$$

schwache Formulierung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b u(\xi,y)d\xi + F(u(b,y)) - F(u(a,y)) = 0\ \forall a < b$$

Annahme: es gebe eine **Schockkurve** $x = \gamma(y)$, so dass für festes y die schwache Lösung $u(x,y)$ in $x = \gamma(y)$ eine Sprungstelle hat und sonst überall diff'bar ist.

Dann gilt $\gamma_y(y) = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}$ wobei $u^- = \lim_{\substack{x \to \gamma(y) \\ x < y}} u(x,y)$

und $u^+ = \lim_{\substack{x \to \gamma(y) \\ x > y}} u(x,y)$

Bsp:$F(u) = \frac{1}{2}u^2, \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{1}{2}\frac{(u^+)^2 - (u^-)^2}{u^+ - u^-} = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$

Beweis: wähle $a < \gamma(y) < b$

$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b u(\xi,y)d\xi = \frac{\partial}{\partial y}\int_a^{\gamma(y)} u(\xi,y)d\xi + \frac{\partial}{\partial y}\int_{\gamma(y)}^b u(\xi,y)d\xi =$
$\gamma'(y)u^- + \underbrace{\int_a^{\gamma(y)} u_y(\xi,y)d\xi}_{\text{Wende an:}u_y + F(u_x) = 0} - \gamma'(y)u^+ + \int_{\gamma(y)}^b u_y(\xi,y)d\xi =$
$\gamma'(y)(u^- - u^+) - \int_a^{\gamma(t)} F\left(u_\xi(\xi,y)\right)d\xi -$
$\int_{\gamma(y)}^b F\left(u_\xi(\xi,y)\right)d\xi = \gamma'(y)(u^- - u^+) - \Big(F(u^-) -$
$F\big(u(a,y)\big)\Big) - \Big(F\big(u(b,y)\big) - F(u^+)\Big)$
$\xrightarrow{\text{Einsetz. schw. Form.}} \gamma'(y)(u^- - u^+) - F(u^-) + F(u^+) = 0,$
$\gamma'(y) = \frac{F(u^-) - F(u^+)}{u^- - u^+}$

EIKONALGLEICHUNG

(hochfrequente Wellen)

Wellengleichung: $u_{tt} = c(x)^2\Delta u$ mit Ausbreitungsgeschw. $c(x)$

$u(x,t) = e^{i\omega t}\psi(x)$ (Trennung der Variablen)

Einsetzen in Wellengleichung: $-\omega^2 e^{i\omega t}\psi(x) = c(x)^2 e^{i\omega t}\Delta\psi$

$$\boxed{\Delta\psi + \frac{\omega^2}{c(x)^2}\psi = 0} \quad (*)$$

$c_0 :=$ Durchschnittsgeschwindigkeit

$n(x) := \frac{c_0}{c(x)}$ nehmen an, dass das nur schwach variiert

$k := \frac{\omega}{c_0}$

$\frac{2\pi}{k} = \lambda$ Wellenlänge (nehmen an, dass sehr klein), $k, \omega \gg 0$

$$\Delta\psi + k^2 n(x)^2\psi = 0$$

Suche nach Lösungen: $\psi(x) = A(x,k)e^{ikS(x)}$

wobei $S \in \mathbb{R}$, A beschränkt als Funktion von k

Einsetzen in $(*)$:

$$[\Delta A + 2ik\nabla A\nabla S + A(ik\Delta S - k^2\nabla S\nabla S) + k^2n^2A]e^{ikS(x)} = 0$$

$$\Rightarrow A(-|\nabla S|^2 + n^2) = \underbrace{\frac{1}{k^2}\Delta A + \frac{2i}{k}\nabla A\nabla S + \frac{i}{k}A\Delta S}_{O(1/k)} \approx 0$$

Eikonalgleichung:

$$\boxed{|\nabla S| = n(x) \Longleftrightarrow S_x^2 + S_y^2 + \cdots = n^2(x)}$$

Ergibt Näherungslösung der Wellengleichung:

$$u(x,t) = A(x)e^{ik(c_0t+S(x))}$$

Niveaulinien von S.

Wellenfronten $\nabla S =$ Richtung der (Licht-)strahlen

LÖSUNG DER EIKONALGLEICHUNG MIT CHAR.

(2-dimensional)

$$\boxed{u_x^2 + u_y^2 = n(x,y)^2, \qquad n = |\nabla u|}$$

Normalvektor auf Lösungsfläche: $(u_x; u_y; -1)$

Also $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ n^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ mit dem ersten Vektor immer tangential.

Charakteristische Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \qquad \frac{dy}{dt} = u_y, \qquad \frac{du}{dt} = n^2(x,y)$$

Umformen: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t}(u_x) = u_{xx}\frac{\partial x}{\partial t} + u_{xy}\frac{\partial y}{\partial t} = u_{xx}u_x + u_{xy}u_y = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)_x = \frac{1}{2}(n^2)_x$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}(n^2)_x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}(n^2)_y, \qquad \frac{du}{dt} = n^2$$

$$\rightarrow u(t) = u(x(0), y(0)) + \int_0^t n^2(x(\tau), y(\tau))d\tau$$

Da $\frac{dz}{dt} = n^2$ eine DGL 2. Ordnung, durch Anfangswerte ist die Lösung nicht eindeutig bestimmt, benötigen noch $\frac{dx}{dt}(0), \frac{dy}{dt}(0)$

Wir stellen uns vor, es seien AB durch eine Kurve $\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ mit der Bedingung $u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s)$ gegeben.

Die Lösungen der char. Gl. sollen auf der Lösungsfläche $u = u(x,y)$ verlaufen, also insbesondere im Anfangspunkt $(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ tangential an die Lösungsfläche verlaufen.

$\rightarrow$ sollte $\frac{dx}{dt}(0), \frac{dy}{dt}(0)$ bestimmen.

Ursprüngliche Char. Gleichungen: $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \nabla u$

Insbesondere: $\begin{pmatrix} \frac{dx(0,s)}{dt} \\ \frac{dy(0,s)}{dt} \end{pmatrix} = \nabla u(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$

Nämlich: $|\nabla u(x_0(s), y_0(s))| = n(x_0(s), y_0(s))$

$$\nabla u(x_0(s), y_0(s)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0(s)}{\partial s} \\ \frac{\partial y_0(s)}{\partial s} \end{pmatrix} = \frac{\partial u_0}{\partial s}$$

Diese beiden Bedingungen legen $\nabla u(x_0(s), y_0(s))$ (fast) fest.

Rezept, um das AWP für die Eikonalgleichung zu lösen:

1. bestimme $\nabla(x_0(s), y_0(s))$ durch

$$|\nabla u(x_0(s), y_0(s))| = n(x_0(s), y_0(s))$$

$$\nabla u(x_0(s), y_0(s)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0(s)}{\partial s} \\ \frac{\partial y_0(s)}{\partial s} \end{pmatrix} = \frac{\partial u_0}{\partial s}$$

2. Löse char. Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}(n^2)_x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}(n^2)_y, \qquad \frac{du}{dt} = n^2$$

mit AB: $\begin{pmatrix} x(0,s) \\ y(0,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(0,s) \\ \frac{dy}{dt}(0,s) \end{pmatrix} = \nabla u(x_0(s), y_0(s))$

3.

$$u(t) = u(x(0), y(0)) + \int_0^t n^2(x(\tau), y(\tau))d\tau$$

4. Koordinatentransformation $(s,t) \mapsto (x,y)$

BEISPIEL 2.16

$$n(x,y) = n_0, konst., \qquad AB: u(x, 2x) = 1$$
$$x_0(s) = s, \qquad y_0(s) = 2s, \qquad u_0(s) = 1$$

Schritt 1: $\nabla u(x_0(s), y_0(s))$ hat Länge n_0 und steht senkrecht auf Niveaulinie. $x_0(s) = s, y_0(s) = 2s$, hat also Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \nabla u(x_0(s), y_0(s)) = \frac{n_0}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schritt 2: Löse

$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2}(n^2)_x = 0, \ x(0,s) = x_0(s) = s, \ \frac{\partial x}{\partial t}(0,s) = \frac{2}{\sqrt{5}}n_0$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}(n^2)_y = 0, \ y(0,s) = y_0(s) = 2s, \ \frac{\partial y}{\partial t}(0,s) = \frac{1}{\sqrt{5}}n_0$

Lösung: $x(t,s) = \frac{2}{\sqrt{5}}n_0t + s, \ y(t,s) = \frac{-1}{\sqrt{5}}n_0t + 2s$

Schritt 3: u bestimmen

$u(t,s) = u_0(s) + \int_0^t n^2(x(\tau,s), y(\tau,s))d\tau = 1 + \int_0^t n_0^2 d\tau = n_0^2 t$

Schritt 4: Koordinatenrücktransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}}n_0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}}n_0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \rightarrow t = \frac{2}{n_0\sqrt{5}}x - \frac{1}{n_0\sqrt{5}}y = \frac{2x-y}{\sqrt{5}n_0^2}$$

$$u(x,y) = 1 + \frac{n_0}{\sqrt{5}}(2x - y)$$

BEISPIEL 2.17

$$n(x,y) = n_0, konst., \qquad AB: u(x,1) = n_0\sqrt{1+x^2}$$
$$x_0(s) = s, \qquad y_0(s) = 1, \qquad u_0(s) = n_0\sqrt{1+s^2}$$

Schritt 1:

$\nabla u(x_0(s), y_0(s))$ hat Länge n_0 und $\nabla u(s,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n_0 s}{\sqrt{1+s^2}}$

$\rightarrow u(s,1) = \begin{pmatrix} \frac{n_0 s}{\sqrt{1+s^2}}; & \underbrace{\pm\frac{n_0}{\sqrt{1+s^2}}}_{so\ dass\ |u(s,1)|=1} \end{pmatrix}$. Wähle $+$.

Schritt 2: Löse

$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2}(n^2)_x = 0, \ x(0,s) = x_0(s) = s, \ \frac{\partial x}{\partial t}(0,s) = \frac{n_0 s}{\sqrt{1+s^2}}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}(n^2)_y = 0, \ y(0,s) = y_0(s) = 1, \ \frac{\partial y}{\partial t}(0,s) = \frac{n_0}{\sqrt{1+s^2}}$

Lösung: $x(t,s) = s\left(\frac{n_0}{\sqrt{1+s^2}}t + 1\right), \ y(t,s) = \frac{n_0}{\sqrt{1+s^2}}t + 1$

Schritt 3: u bestimmen

$u(t,s) = u_0(s) + \int_0^t n^2(x(\tau,s), y(\tau,s))d\tau = n_0\sqrt{1+s^2} + n_0^2 t = n_0(n_0 t + \sqrt{1+s^2})$

Schritt 4:

$x^2 + y^2 = \left(\frac{n_0}{\sqrt{1+s^2}}t + 1\right)^2(s^2+1) = \left(n_0 t + \sqrt{1+s^2}\right)^2$

$$\rightarrow u(x,y) = n_0\sqrt{x^2+y^2}$$

LAPLACE- UND POISSON-GLEICHUNG

Laplace-Gleichung: $\boxed{\Delta u = 0}$

Lösungen heissen harmon. Funktionen

Poisson-Gleichung: $\boxed{\Delta u = F}$

Das **Dirichlet-Problem (Neumann-Problem)** für die Poisson-Gleichung auf einem Gebiet $D \in \mathbb{R}^n$ besteht darin, die Poisson-Gleichung mit den Randbedingungen

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \partial D, \qquad g(x)\ gegeben$$
$$\nabla u(x)n(x) = h(x), \qquad x \in \partial D, \qquad h(x)\ gegeben$$

mit $n(x)$ der nach innen zeigende Einheitnormalenvektor.

Bem.: Aus den Cauchy-Riemann-DGLs folgt: für $n = 2$ sind Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen harmonisch.

Bsp.: $z = x + iy, \ x = \Re(z), \ x^2 - y^2 = \Re(z^2)$ sind harm.

Bsp.: mit $r = \sqrt{x^2+y^2}, \ u(r) = \ln(r) = \Re(\ln(z))$ ist harm.

DIRICHLET-PROBLEM F. LPL-GL. AUF KREIS

$B_a =$ Kreisscheibe um 0 in $\mathbb{R}^2$ mit Radius a.

$$\Delta u = 0, \qquad u \in B_a, \qquad u|_{\partial B_a} = g$$

Sep.-Ansatz: Superpos. von Lsg. d. Form: $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\phi)$

$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}\Phi''R = 0 \leftrightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = 0$

$\rightarrow r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} \rightarrow$ muss also konstant sein!

Suche $\lambda \in \mathbb{R}$, F. v. $R(r), \Phi(\phi)$, s.d.: $r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$

d.h.:

$\Phi'' = -\lambda\Phi \qquad \Phi_n = A_n\cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi), \lambda_n = n^2$

$r^2R'' + rR' - \underbrace{\lambda}_{n^2} R = 0$

$R_n(r) = C_n r^n + D_n x^{-n}, \qquad r^2(r^n)'' = n(n-1)r^n, \qquad rR' = nr^n, \qquad -n^2R = -n^2r^n$

Da $R_n(r)$ in 0 endlich sein soll: $D_n = 0$

$u_n(r,\varphi) = r^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))$ löst $\Delta u = 0$.

Superposition: Lösung der Laplace-Gl.: $\forall A_n, B_n$

$u(r,\varphi) = A_0\sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))$

Bestimmen von A_n, B_n durch Randbedingung.

Weil $g(\varphi)$ 2π-periodisch: als Fourier-Reihe:

$g(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(n\varphi) + \beta_n\sin(n\varphi)$

Gleichzeitig:

$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))$

$\rightarrow A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \ a^nA_n = \alpha_n, \ a^nB_n = \beta_n$

Lösung:

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\alpha_n\cos(n\varphi) + \beta_n sin\ (n\varphi))$$

POISSON-KERN DIESES PROBLEMS

$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)d\vartheta, \ \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\cos(n\vartheta)\,d\vartheta$

$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\sin(n\vartheta)\,d\vartheta$

$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)d\vartheta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\cos(n(\vartheta - \varphi))\,d\vartheta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos(n(\vartheta - \varphi))\right)d\vartheta$

Nebenrechnung: mit $\varrho = \frac{r}{a}, \ \alpha = \vartheta - \varphi$

$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\varrho^n\cos(n\alpha) = \Re\left(\frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(\varrho e^{i\alpha})^n}_{geom.Reihe}\right) =$

$\Re\left(\frac{1}{2} + \frac{\varrho e^{i\alpha}}{1-\varrho e^{i\alpha}}\right) = \Re\left(\frac{1-\varrho e^{i\alpha}+2\varrho e^{i\alpha}}{2(1-\varrho e^{i\alpha})}\right) = \Re\left(\frac{(1+\varrho e^{i\alpha})(1-\varrho e^{-i\alpha})}{2(1-\varrho e^{i\alpha})(1-\varrho e^{-i\alpha})}\right) =$

$\Re\left(\frac{1+\varrho(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})-\varrho^2}{2(1-\varrho(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+\varrho^2)}\right) = \Re\left(\frac{1+2i\varrho\sin(\alpha)-\varrho^2}{2(1-2\varrho\cos(\alpha)+\varrho^2)}\right) =$

$\Re\left(\frac{1-\varrho^2}{2(1-2\varrho\cos(\alpha)+\varrho^2)}\right)$

Lösung:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)K(r,\varphi,a,\vartheta)d\vartheta$$

$$K(r,\varphi,a,\vartheta) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}$$

der Poisson-Kern für Dirichletproblem auf dem Kreis.

Harmonische Funktion:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, offen. f zweimal stetig diff'bar, heisst harmonisch, wenn $\Delta f(\vec{x}) = 0\ \forall\vec{x} \in U$

Das Maximumprinzip: (gilt auch für Minimum)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und u harmonisch auf D.

Nimmt u sein Maximum im Innern von D an, dann ist u konst. (d.h. nicht-konstante Funktionen nehmen ihr Maximum am Rand an oder sind unbeschränkt)

Satz 7.7: Wenn u harmonisch aus D. $x_0 \in D, \ r > 0$ so dass $B_r(x_0) = \{x||x - x_0| \le r\} \subset D \Rightarrow u(x_0)$ ist der Mittelwert von u über ∂B_r.

FINITE DIFFERENZEN-METHODE FÜR LPL-GL.

Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf einem Rechteck $[0,a] \times [0,b]$

1. Schritt: Gitter einführen (diskretisieren) $\rightarrow \Delta x, \Delta y$

$$\Delta x = \frac{a}{N-1}, \ \Delta y = \frac{b}{M-1}, \ N, M \gg 0$$

$$(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y), \qquad 1 \le i \le N-1, \qquad 1 \le j \le M-1$$

Ist u eine Funktion auf $[0,a] \times [0,b]$ so setze $U_{ij} = u(x_i, y_j)$

Wollen „ Δ diskretisieren".

$u(x_{i+1}, y_j) = u(x_i, y_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)(\Delta x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)(\Delta x)^2 \ldots$

$u(x_{i-1}, y_j) = u(x_j y_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)(\Delta x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)(\Delta x)^2 \ldots$

$$u(x_{i+1}, y_j) = 2u(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)(\Delta x)^2 + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \cdots$$

Def.: Der diskrete Laplace-Operator:

$$(\Delta_{fin}U)_{i,j} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

Ordnet dem Vektor $(U_{i,j}), \ 0 \le i \le N-1, \ 0 \le j \le M-1$ den Vektor $(\Delta_{fin}U)_{i,j}, \ 1 \le i \le N-2, \ 1 \le j \le M-2$ zu.

Das diskrete Dirichlet-Problem besteht darin, die Gleichung $\Delta_{fin}U = 0$ mit vorgegeb. Randwerten

$$U_{i,0} = a_i, U_{i,M-1} = b_i, U_{0,j} = c_j, U_{N-1,j} = d_j$$

Bemerkung: Lösungen erfüllen Maximumprinzip.

GREEN'SCHE FUNKTIONEN

Erinnerung: Wärmeleitungskern

AWP: $\quad u_t - \alpha\Delta u = 0, \ u(x,0) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^3$

Lösung: $\quad u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} K_t(x - x')f(x')dx_1'dx_2'dx_3'$

mit WLK: $\quad K_t(x - x') = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}}e^{\frac{-|x-x'|^2}{4\pi t}}$

Ähnliches für Poissongleichung: $\Delta u = \varrho$

harm. Funkt. für Punktldg. im Ursprung ist (bis auf Konst.)

$$\left.\begin{array}{l} n = 2: \ \log(r) \\ n = 3: \ \frac{-1}{4\pi}\frac{1}{r} \end{array}\right\} Green'sche Funkt.\ für\ \Delta$$

$$\Delta\left(\frac{-1}{2\pi}\log(x)\right) = \delta(x), \qquad n = 2$$

Lösung: $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-x')\varrho(x')dx_1' \dots dx_n'$

wobei $K(x-x') = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi}\log|x-x'|, & n=2 \\ \frac{-1}{4\pi}\frac{1}{|x-x'|}, & n=3 \end{cases}$

der **Poisson-Kern**.

AUS DEN ÜBUNGEN

U1A3: Fourier-Reihen-Ansatz: z.B.
$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(t)\sin(nx)$.
Dabei die Funktion so fortsetzen, dass das auch funktioniert (hier: ungerade). Dann Koeff-Vergleich.

Fourier-Reihe allgemein:
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$
wobei: $a_0 = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} u(x)dx$, $a_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} u(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$
und $b_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} u(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$

S2A1: Wellengleichung. Lösen mit:
Formel von d'Alembert: Lösung für das Problem
$u_{tt} = c^2u_{xx}$, $\quad u(x,0) = f(x)$, $\quad u_t(x,0) = g(x)$,
$x\in\mathbb{R}$, $\quad t\ge 0$, $\quad t\in\mathbb{R}^+$
lautet $u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$
Herleitungsansatz: $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$

S2A2: Reflexionsprinzip anwenden, weil nur gültig für $x \ge 0$:
Reflexionsprinzip: Wellengleichung auf $x<0$ gerade fortsetzen → $\tilde{u}$ (z.B. $\tilde{f}(x) = f(|x|)$, ...), dann d'Alembert verwenden. Dabei dürfen die AB und RB nicht verletzt werden!

S2A3: Wellengl. mit $x\in\mathbb{R}^+$. Lösen mit Parallelogrammgl. (weil NICHT gilt $t \le x$) und Ansatz $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$.
Parallelogrammgleichung: Zuerst Problem mit d'Alembert lösen, dann Lsg für $x = ct$ finden. Dann für $ct > x$:
$u(A_-) + u(A_+) = u(B_-) + u(B_+)$ mit
$A_{+,-} := (x_0 \pm a, t_0 \pm b)$ und $B_{+,-} := (x_0 \pm b, t_0 \pm a)$
Wahl der Punkte: zu best.: t_0, x_0, a, b
Zwei Pte im Gebiet $ct \le x$ (gelöst mit d'Alembert), z.B. $ct = x$
→ $B_- = (v,v), A_+ = (u,u)$
Einen Pt. auf Randbedingung. Letzter Pt. allgemein: $B_+ = (x,t)$
Daraus folgen 3 Gleichungen → eine Var. frei wählen, z.B. $b = 0$

S2A4: WLG lösen mit dem Duhamel'schen Prinzip:
Duhamel'sches Prinzip:
Ursprungsproblem (WLG):
PDE $u_t - u_{xx} = F(x,t)$, $\; 0<x<L, t>0$ mit AB und RB:
$u(0,t) = u(L,t) = 0, t\ge 0$ und $u(x,0) = 0, 0\le x\le L$
Kann man lösen durch Berechnen folgender Teillösungen:
PDE $v_t^{(s)} - v_{xx}^{(s)} = 0, 0<x<L, t>s$ mit AB und RB:
$v^{(s)}(0,t) = v^{(s)}(L,t) = 0, t\ge s$ bzw. $v^{(s)}(x,s) = F(x,s), 0\le x\le L$. Dabei gilt dann: $u(x,t) := \int_0^t v(x,t,s)ds$

S2A5: WLG lösen. Kanonische Lösung.
Wärmeleitungskern:
PDE: $u_t = u_{xx}, x\in\mathbb{R}, t\ge 0$.
Lösung davon: $u(x,t) := \varphi(\lambda(x,t))$ mit $\lambda(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ ist genau dann eine Lösung, wenn die ODE $\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\lambda\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$ erfüllt ist.

Mögliche Lösungen der ODE:
$\operatorname{erf}(s) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-r^2}dr$ sowie $\operatorname{erfc}(s) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_s^\infty e^{-r^2}dr$
Eine Lsg. d. PDE: Wärmeleitungskern: $K(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$

S3A2: Radiale Wellengleichung:
PDE: $u_{tt} = \Delta u$. Sei $u(\vec{x},t) = u(r,t)$ eine radiale Lsg. der PDE. Dann setzen wir $v(r,t) := ru(r,t), \mathbb{R}_r^+\times\mathbb{R}_t \to \mathbb{R}$. Nun gilt die 1D-Wellengleichung $v_{tt} - v_{rr} = 0$.
Achtung: Def.-Bereiche erfordern meist Reflexionsprinzip.

Kirchhoff-Lösung der 3D-Wellengleichung: (für S3A4)
PDE: $\overline{u}_{tt} - c^2\Delta\overline{u} = 0$
RB: $\overline{u}(x_1,x_2,x_3,0) = 0$ und AB: $\overline{u}(x_1,x_2,x_3,0) = \overline{g}(x_1,x_2x_3)$
Lösung: $\overline{u}(\vec{x},t)$
$= \frac{1}{4\pi c^2 t}\oint_{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=ct}\overline{g}(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)d\omega(\vec{y})$

S3A4: Kirchhoff-Lösung und 2D-Wellengleichung:
$\overline{g}(x_1,x_2,x_3) = g(x_1,x_2)$, also
$\overline{u}(x_1,x_2,x_3,t) = \overline{u}(x_1,x_2,0,t) = \overline{u}(x_1,x_2,t)$.
S. v. Green: $F:\mathbb{R}^2\supset D\to\mathbb{R}^2$, glatt, und $\overline{g}: D\to\mathbb{R}$ gilt
$\oint_{F(D)}\overline{g}(\vec{y})d\omega(\vec{y}) = \iint_D \overline{g}(F(y_1,y_2))\left|\frac{\partial F}{\partial y_1}\times\frac{\partial F}{\partial y_2}\right|dy_1dy_2$
Hier ist für die obere Halbsphäre (untere analog):
$F(x_1+y_1,x_2+y_2) = \left(x_1+y_1, x_2+y_2, \sqrt{t^2-y_1^2-y_2^2}\right)$
Es folgt:
$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\le t}\frac{g(x_1+y_1,x_2+y_2)}{\sqrt{t^2-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2$$

S3A4 Laplace-Transformation:
$F(s) := \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
Eigenschaften: Linear, $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$

S4A1 Methode der Charakteristiken:
Quasilineare PDE: $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$
mit beispielsw. AB: $u(x,0) = f(x)$
Parametrisierung: $t\mapsto(x(t),y(t))$, $\; s\mapsto(s,0,f(s))$
Es gilt: $x_t = a(x(s,t),y(s,t),u(s,t))$
$y_t = b(x(s,t),y(s,t),u(s,t))$ und
$u_t = c(x(s,t),y(s,t),u(s,t))$
Aus den AB folgt: $x(s,0) = s, y(s,0) = 0, u(s,0) = f(s)$
Dann Rücktransformation.
Charakteristiken zeichnen: konstantes s annehmen, t variieren

S5 Schocks bei Charakteristiken von Erhaltungsgleichungen, Stosstrajektorien, Rankine-Hugoniot-Bedingung:
PDE (Erhaltungsgl.): $u_y + [F(u)]_x = 0$
Wenn u glatt ausser bei $x = \gamma(y)$, so gilt:
$\gamma_y(y) = \frac{F(u_+)-F(u_-)}{u_+-u_-}$ mit $u_+ = \lim_{x\to\gamma(y),x>\gamma(y)} u(x,y)$ und
$u_- = \lim_{x\to\gamma(y),x<\gamma(y)} u(x,y)$. Dabei ist γ_y die Stossgeschw.

S6 Bessel-DGL:
Bessel'sche DGL: $x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$
Lösungen (Bessel-Funkt.): $y = J_n(x) = x^n\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n}m!(n+m)!}$
$J_n(x)$ ist einzige Lsg. dieser DGL, die endlich und glatt in $x = 0$.

S6 Separation der Variablen:
Ansatz: $f(x,y,z) = A(x)B(y)C(z)$

Klassifikation:
$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$
wobei $A, B, \dots$ nur von x und y abhängen.
Elliptisch, falls $AC-B^2>0$, parabolisch, wenn $AC-B^2=0$ und hyperbolisch, wenn $AC-B^2<0$

Regel von Leibnitz:
$\frac{d}{dt}\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} f(x,t)dx$
$\quad = \int_{\psi(t)}^{\varphi(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx + f(\varphi(t),t)\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} - f(\psi(t),t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}$

Laplace in Polarkoordinaten:
$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}$$

Laplace in Kugelkoordinaten:
$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin(\varphi)\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$
$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_\omega u$, wobei $\Delta_\omega u$ nur Ableit. $\perp$ zu r enthält.

FOURIER-TRAFO

Sei $f(x)$ eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$ so dass $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx_{1\dots n} < \infty$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(k)e^{ikx}dk_{1\dots n}$$
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-ikx}dx_{1\dots n}$$

ABLEITUNG:

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f}{\partial x_j}e^{-i(k_1x_1+\dots+k_nx_n)}dx_{1\dots n}$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\frac{\partial}{\partial x_j}e^{-i(k_1x_1+\dots+k_nx_n)}dx_{1\dots n}$$
$$= \frac{ik_j}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i(k_1x_1+\dots+k_nx_n)}dx_{1\dots n} = ik_j\hat{f}(k)$$
$$\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}} = -k_j^2\hat{f}(k), \qquad \widehat{\Delta f}(k) = -|k|^2\hat{f}(k)$$

LEIBNIZ-REGEL

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^{\gamma(y)}u(\xi,y)d\xi = \int_a^{\gamma(y)}\frac{\partial u}{\partial y}(\xi,y)d\xi + \frac{\partial\gamma}{\partial y}(y)u^-$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^{\gamma(y)}f(\xi,y)d\xi\right) = \gamma'(y)f(\gamma(y),y) + \int_a^{\gamma(y)}f_y(\xi,y)d\xi$$
$$\frac{\partial}{\partial t}F(x(t),y(t)) = F_x(x(t),y(t))x_t(t) + F_y(x(t),y(t))y_t(t)$$

LAPLACE-OP

In Polarkoord.:
$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}$$

ANDERES MATH

Green'sche Formel / S.v. Gauss in der Ebene:
$$\int_{\partial\Delta}Pdx + Qdt = \int_\Delta(Q_x - P_t)dx\,dt$$

Totales Differential:
$df = \sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$, $\; f(g(t),h(t)) \to df = \frac{\partial f}{\partial x}g'dt + \frac{\partial f}{\partial y}h'dt$

KUGELKOORDINATEN

$y_x = R\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $\quad 0\le\theta\le\pi$
$y_y = R\sin(\theta)\,\mathrm{sinn}\,(\varphi)$, $\quad 0\le\varphi\le 2\pi$
$y_z = R\cos(\theta)$, $\quad d\omega(y) = R^2\sin(\theta)\,d\theta d\varphi$

SEPARIERBARE ODE

$$\frac{du}{dt} = g(t)k(u) \Longrightarrow \int\frac{du}{k(u)} = \int g(t)dt + const.$$
Bsp: $\frac{du}{dt} = -u^2 \to g(t) = 1, k(u) = -u^2 \to \frac{1}{u} = t + const.$

VARIATION DER KONSTANTEN

$$\frac{du}{dt} = p(t)u + q(t)$$
1. Fall: $\int\frac{1}{u}du = \int p(t)dt \to u(t) = Ce^{P(t)}$ homogene Lsg.
Hat man eine spezielle Lsg. der inhom. Gl. gefunden, so erhält man die allg. Lsg. der inhom. Gl. durch Addition der allg. Lsg. Suche nach einer spez. Lsg. der inhom. Gl. durch Var. d. Konst.
Ansatz: $u(t) = C(t)e^{P(t)}$. Einsetzen in inhomogene Gl.:
$\frac{d}{dt}\left(C(t)e^{P(t)}\right) = p(t)C(t)e^{P(t)} + q(t)$
$\to C(t) = \int q(t)e^{-P(t)}dt$
Bsp.: $\frac{du}{dt} = t^3 - ut \to p(t) = -t, q(t) = t^3$
Homogene Gleichung: $\frac{du}{dt} = -ut \to u(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$
Spez. Lsg.: $u(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot\int t^3e^{\frac{1}{2}t^2} = (t^2-2) + c\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$

ADMINISTRATIVES

HG F 28.1, Dahinden