ETH zürich

# Thermodynamik II PVK - Tag 2

Nicolas Lanzetti

# Heutige Themen

- Wärmeübertragung;
- Wärmeleitungsgleichung;
- Instationäre Wärmeleitung;
- Konvektion.

# Notation

Es wird folgende Notation benutzt:

| Symbol | Beschreibung | Einheit |
|---|---|---|
| $\dot{Q}$ | Wärmestrom | W |
| $\dot{Q}'$ | Wärmestrom pro Länge | $\mathrm{W/m}$ |
| $\dot{Q}''$ | Wärmestrom pro Fläche | $\mathrm{W/m^2}$ |
| $\dot{Q}'''$ | Wärmestrom pro Volumen | $\mathrm{W/m^3}$ |

# Wärmeübertragung

Es gibt drei Wege, Wärme zu übertragen:

- Wärmeleitung (conduction);
- Konvektion (convection);
- Strahlung (radiation).

# Wärmeleitung

Wärmeleitung wird von dem Fourier'sche Gesetzt beschrieben:

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}, \tag{1}$$

wobei $\lambda$ der Wärmeleitfähigkeit/Wärmeleitungskoeffizient ist und Einheit $^{\mathrm{W}}/_{\mathrm{m \cdot K}}$ hat. Je grösser $\lambda$ ist, desto besser leitet das Material.

# Konvektion

Zwei Typen von Konvektion:

- Natürliche Konvektion;
- Erzwungene Konvektion.

Der Wärmestrom ist:

$$\dot{Q}'' = \alpha \cdot (T_s - T_\infty), \tag{2}$$

wobei:

- $\alpha$: Wärmeübertraugungskoeffizient, Einheit $W/m^2 \cdot K$;
- $T_s$: Oberflächentemperatur;
- $T_\infty$: Fluidtemperatur im Unendlichen.

# Strahlung

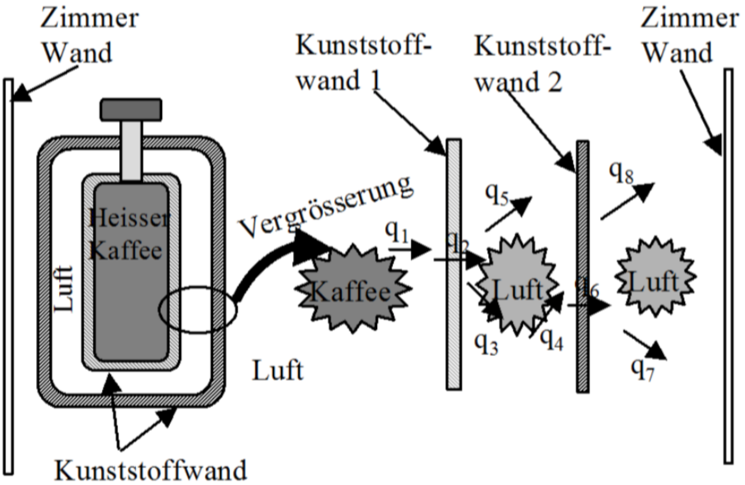
Der Wärmestrom ist:

$$\dot{Q}'' = \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4), \tag{3}$$

wobei $\sigma = 5.678 \cdot 10^{-8}\, \mathrm{W}/\mathrm{m^2 \cdot K^4}$.

Mehr dazu in Thermodynamik III.

# Kombination



# Wärmeleitungsgleichung

Energieerhaltung auf ein infinitesimales Kontrollvolumen und Fourier'sche Gesetz

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \tag{4}$$

liefern die Wärmeleitungsgleichung

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}, \tag{5}$$

mit $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

# Wärmeleitungsgleichung

- **Kartesische Koordinaten:**

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$

- **Zylindrische Koordinaten:**

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$

- **Kugelkoordinaten:**

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda \cdot r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda \cdot \sin \phi \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$

# Wärmeleitungsgleichung

Vereinfachungen:

- $\lambda =$ konst.:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \Delta T + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}; \tag{6}$$

- Stationär: $\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = 0;$
- 1-Dimensional: $\frac{\partial}{\partial x}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) = 0;$
- Rotationssymmetrisch: $\frac{\partial}{\partial \phi}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) = 0;$
- Unendlich lang: $\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) = 0;$
- Keinen Quellen: $\dot{Q}'''_{\text{Quellen}} = 0.$

# Wärmeleitungsgleichung

Das Lösen von der Wärmeleitungsgleichung braucht Anfangsbedingungen/Randbedingungen. Hier vier Beispiele:

- Konstante Oberflächentemperatur:

$$T(x=0) = T_s. \tag{7}$$

- Konstanter Wärmestrom:

$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \dot{Q}_s''. \tag{8}$$

- Adiabate oder isolierte Fläche:

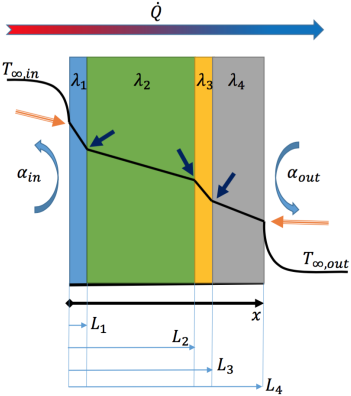
$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0. \tag{9}$$

- Konvektion bei der Oberfläche:

$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \pm\alpha \cdot (T(x=0) - T_\infty). \tag{10}$$

# Wärmeleitungsgleichung

Wie löst man die Wärmeleitungsgleichung wenn das Profil mehrere Schichte hat?




- PDE für jeden Schicht lösen;
- Zusätzliche Randbedingungen: Bei $x = \{L_1, L_2, L_3\}$ gleiche Temperatur und gleicher Wärmestrom, z.B.

$$T_{\lambda_1}(L_1) = T_{\lambda_2}(L_1),$$

$$-\lambda_1 \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\,T_{\lambda_1}}{\mathrm{d}x}\right|_{L_1} = -\lambda_2 \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\,T_{\lambda_2}}{\mathrm{d}x}\right|_{L_1}.$$

# Wärmequelle

Thermische Energie die aus eine anderen Energiequelle umgewandelt wird, z.B. elektrische Folie, die elektrische Energie in Wärme umwandelt.
Für einen Leiter der Länge $L$ mit Querschnittsfläche $a$ und mit spezifischen elektrische Widerstand $\rho_e$, der durch den Strom $I$ durchgestromt wird, gilt

$$P = \dot{Q} = I^2 \cdot R_e = I^2 \cdot \frac{\rho_e \cdot L}{a}, \tag{11}$$

d.h.

$$\dot{Q}''' = \frac{\dot{Q}}{V} = \frac{I^2 \cdot \frac{\rho_e \cdot L}{a}}{a \cdot L} = \frac{I^2 \cdot \rho_e}{a^2}. \tag{12}$$

# Beispiel

Ebene Wand der Länge $2L$ mit vernachlässigbarem Wärmestrom in $y$ Richtung und Wärmequelle $\dot{Q}''' > 0$. Das Problem ist stationär. Die Temperatur bei $x = -L$ und $x = L$ sei $T_s$. Das Material habe eine konstante Wärmeleitfähigkeit $\lambda$.

Wärmeleitungsgleichung

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$

vereinfacht sich zu

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\dot{Q}'''. \tag{13}$$

Integration liefert:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dot{Q}'''}{\lambda} \cdot x + C_1 \tag{14}$$

# Beispiel

Da das Problem um $x = 0$ symmetrisch ist, muss gelten:

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\dot{Q}'''}{\lambda} \cdot 0 + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0. \qquad (15)$$

Zweite Integration liefert:

$$T(x) = -\frac{\dot{Q}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2 + C_2 \qquad (16)$$

Einsetzen der Randbedinung $T(x = \pm L) = T_s$:

$$T_s = -\frac{\dot{Q}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot L^2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{Q}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot L^2. \qquad (17)$$

# Beispiel

Der Temperaturprofil ist also

$$T(x) = T_s + \frac{\dot{Q}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot (L^2 - x^2), \tag{18}$$

d.h. ein parabolisches Profil mit Maximum in $x = 0$, d.h. genaum im Zentrum der Wand. Der Wärmestrom ist

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\lambda \cdot \frac{\dot{Q}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot (-2x) = \dot{Q}''' \cdot x. \tag{19}$$

**Bemerkung:** Alternativ zu der Überlegung mit der Symmetrie kann man die zwei Integrationskonstanten mit den zwei Randbedinungen $T(-L) = T_s$ und $T(L) = T_s$ bestimmen.

# Analogie zu der Elektrotechnik

Die stationäre eindimensionale Wärmeleitungsgleichung ($\lambda = \text{const.}, \dot{Q}''' = 0$) lautet

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0. \tag{20}$$

Mit den Randbedingungen $T(x=0) = T_{\text{high}}$ und $T(x=L) = T_{\text{low}}$ folgt

$$T(x) = T_{\text{high}} + (T_{\text{low}} - T_{\text{high}}) \cdot \frac{x}{L}. \tag{21}$$

Der Wärmestrom ist

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{T_{\text{low}} - T_{\text{high}}}{L}. \tag{22}$$

# Analogie zu der Elektrotechnik

Somit folgt für den Wärmestrom

$$\dot{Q} = \lambda \cdot A \cdot \frac{T_{\text{high}} - T_{\text{low}}}{L} \tag{23}$$

oder

$$\underbrace{T_{\text{high}} - T_{\text{low}}}_{\Delta T} = \dot{Q} \cdot \frac{L}{A \cdot \lambda}. \tag{24}$$

Der Wärmewiderstand ist somit

$$R_{\text{Wand}} = \frac{L}{A \cdot \lambda} \tag{25}$$

und hat Einheit K/W.

# Wärmewiderstände

Die Wärmewiderstande sind:

- ebene Wand:

$$R_{\text{eben}} = \frac{b}{A \cdot \lambda}, \tag{26}$$

  mit $b$ Dicke der Wand;

- zylindrische Wand:

$$R_{\text{zyl}} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \cdot \lambda \cdot L}, \tag{27}$$

  mit $L$ Länge des Zylinders.

- konvektiv:

$$R_{\text{konv}} = \frac{1}{A \cdot \alpha}, \tag{28}$$

  aus $\dot{Q} = A \cdot \alpha \cdot (T_s - T_\infty)$.

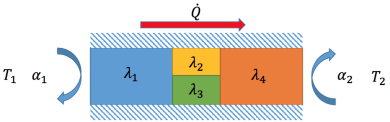
# Wärmewiderstände

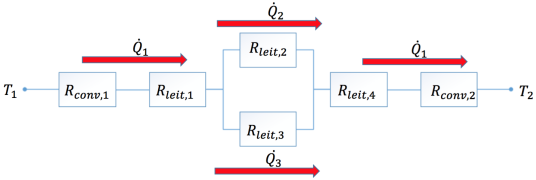
Man darf die Wärmewiderstand nutzen, wenn das Problem folgende Voraussetzungen erfüllt:

- stationär;
- eindimensional;
- keine Wärmequelle (dünne Heizfolie ist erlaubt).

Zusätzlich bekommt man mit diesem Verfahren kein Temperaturprofil.

# Serie- und Parallelschaltung

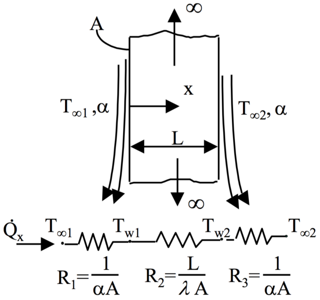



$$R_{\text{tot}} = R_{\text{conv},1} + R_{\text{leit},1} + \frac{R_{\text{leit},2} \cdot R_{\text{leit},3}}{R_{\text{leit},2} + R_{\text{leit},3}} + R_{\text{leit},4} + R_{\text{conv},2}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{tot}}}.$$

# Beispiel




Der Wärmestrom ist

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{A \cdot \alpha} + \frac{L}{\lambda \cdot A} + \frac{1}{A \cdot \alpha}}. \tag{29}$$

# Beispiel

Für die Temperatur $T_{w1}$ gilt es:

$$T_{\infty 1} - T_{w1} = \dot{Q} \cdot R_1 \tag{30}$$

Daraus folgt

$$T_{w1} = T_{\infty 1} - \underbrace{\frac{L}{\lambda \cdot A} \cdot \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{A \cdot \alpha} + \frac{L}{\lambda \cdot A} + \frac{1}{A \cdot \alpha}}}_{\text{Temperatursabfall über } R_1} . \tag{31}$$

Das ist analog zu dem Spannungsteiler:

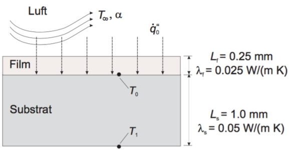
$$V_{w1} = V_1 - \underbrace{\frac{R_1}{R_{\text{tot}}} \cdot (V_1 - V_2)}_{\text{Spannungsabfall über } V_1} . \tag{32}$$

# Aufgabe (Prüfung Sommer 2007, Aufgabe 1)

In einem Mikrofabrikationsprozess wird ein transparenter Film auf ein 1 $cm^2$ grosses Substrat geschweisst. Um die Temperatur an der Film-Substrat-Grenzfläche bei $T_0$ zu halten, wird eine homogene Wärmestromdichte $\dot{q}_0''$ in Form von Wärmestrahlung zugeführt.

$\dot{q}_0''$ wird vollständig an der Film-Substrat-Grenzfläche absorbiert, der Film selbst absorbiert keine Wärmestrahlung.

Die Unterseite des Substrats wird bei Temperatur $T_1$ gehalten, während an der Oberseite ein Wärmeübergang zwischen Film und Umgebungsluft ($T_\infty$) mit dem Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha$ stattfindet.




a) Skizzieren Sie das thermische Widerstandsschema für dieses Problem (thermisches Ersatzschaltwerk, Analogie zum elektrischen Strom) und beschreiben Sie alle thermischen Widerstände in Funktion der gegebenen Variablen (ohne Zahlenwerte).

b) Berechnen Sie die Wärmestromdichte $\dot{q}_0''$, die nötig ist, um die Film-Substrat-Grenzfläche bei $T_0 = 60°C$ zu halten, wenn $T_\infty = 20°C$, $T_1 = 30°C$ und $\alpha = 50$ W/(m$^2$ K) sind.

# Aufgabe (Zwischenprüfung 2010, Aufgabe 1)

In einem Hochtemperaturnuklearreaktor im stationären Zustand wird die Atomspaltung von Thorium zur Energiegewinnung verwendet. Dafür wird ein hohles, zylindrisches Thoriumelement durch Graphit abgeschirmt und die Reaktionswärme wird aussen mit gasförmigem Helium bei einer Temperatur von $T_\infty$ = 700°C zur Energiegewinnung abtransportiert. Der Innenraum ($0<r<r_1$) des hohlen Thoriumelements ist mit einem ruhenden, nicht reaktiven Gas gefüllt.

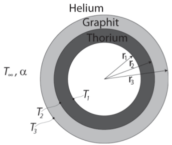
| | Leitfähigkeit |
|---|---|
| Thorium: | $\lambda_{Th}$ = 54 W/(m K) |
| Graphit: | $\lambda_{Iso}$ = 4 W/(m·K) |

Der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Graphit und Helium sei $\alpha$ = 2200 W/(m²·K).

a) Zeichnen Sie qualitativ die radiale Temperaturverteilung vom Reaktorelement für eine konstante und gleichmässige Wärmequelle in der Thoriumschicht.

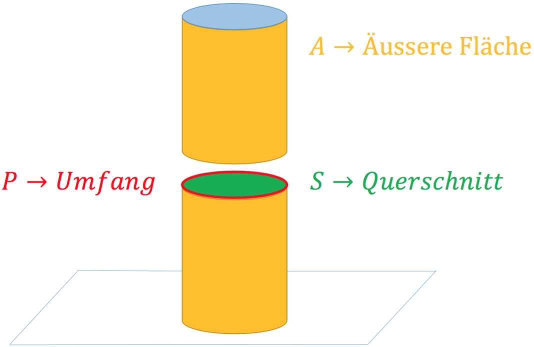
b) Berechnen Sie die Temperaturen $T_1$ und $T_2$ an der Innen- und Aussenseite des Brennstoffelements, wobei das Brennstoffelement eine Wärme $\dot{Q}''' = 10^8$ W/m³ freigibt.

***Hinweise:*** Es findet kein Wärmetransport in z-Richtung statt!
Der Wärmeübergangskoeffizient vom Helium kann als konstant angenommen werden.




$r_1$ = 0.8 cm
$r_2$ = 1.1 cm
$r_3$ = 1.4 cm

# Rippen - Notation



# Rippengleichung

Energieerhaltung auf ein Kontrollvolumen zylinderisches Kontrollvolumen liefert

$$\begin{aligned}\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \cdot T\right) = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial x}(S \cdot u \cdot T) \\ - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \\ - \dot{Q}''_{\text{Strahlung}} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}.\end{aligned} \tag{33}$$

# Vereinfachte Rippengleichung

- Querschnitt $S$ ist constant;
- Kein Fliessen von Material in der Rippe;
- Stationär;
- Keine Wärmequelle;
- Keine Strahlung.

$$\begin{aligned}\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \cdot T\right) = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial x}(S \cdot u \cdot T) \\ - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \\ - \dot{Q}''_{\text{Strahlung}} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\end{aligned} \tag{34}$$

# Vereinfachte Rippengleichung

Daraus folgt (mit $\mathrm{d}A = P \cdot \mathrm{d}x$)

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - P \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{P \cdot \alpha}{\lambda \cdot S} \cdot (T - T_\infty) = 0 \tag{36}$$

Mit $\theta = T - T_\infty$ und $m^2 = \frac{P \cdot \alpha}{\lambda \cdot S}$:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2 \cdot \theta = 0. \tag{37}$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\theta(x) = C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot x}. \tag{38}$$

# Erste Randbedingungen

Mit bekannter Fusstemperatur $T_F$ folgt:

$$T(x=0) = T_F \qquad \Rightarrow \qquad \theta(x=0) = T_F - T_\infty = \theta_F \tag{39}$$

Einsertzen liefert:

$$\theta(x=0) = C_1 + C_2 = \theta_F. \tag{40}$$

Für die zweite Randbedingung gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Adiabater Kopf;
- Konvektion am Kopf;
- Bekannte Temperatur am Kopf;
- Unendliche lange Rippe.

# Zweite Randbedingungen: Adiabater Kopf

Für eine Rippe mit Länge $L$ mit adiabatem Kopf ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0, \tag{41}$$

d.h.

$$C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = 0. \tag{42}$$

Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m \cdot (L - x))}{\cosh(m \cdot L)}, \tag{43}$$

wobei $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ und $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

# Zweite Randbedingungen: Konvektion am Kopf

Für eine Rippe mit Länge $L$ ist

$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = \alpha \cdot \underbrace{(T(x=L) - T_\infty)}_{\theta(x=L)} = \alpha \cdot \theta(x=L), \tag{44}$$

d.h.

$$C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (C_1 \cdot e^{m \cdot L} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L}). \tag{45}$$

Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m \cdot (L-x)) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \sinh(m \cdot (L-x))}{\cosh(m \cdot L) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \sinh(m \cdot L)}. \tag{46}$$

# Zweite Randbedingungen: Bekannte Temperatur am Rippenkopf

Für eine Rippe mit Länge $L$ ist

$$\theta(x = L) = \theta_K = T_K - T_\infty, \tag{47}$$

d.h.

$$C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L} = \theta_K. \tag{48}$$

Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\frac{\theta_K}{\theta_F} \cdot \sinh(m \cdot x) + \sinh(m \cdot (L - x))}{\sinh(m \cdot L)}. \tag{49}$$

# Zweite Randbedingungen: Unendlich lange Rippe

Für eine Rippe mit Länge $L \to \infty$ ist

$$T(x \to \infty) = T_\infty. \tag{50}$$

d.h.

$$C_1 \cdot e^{m \cdot \infty} + C_2 \cdot e^{-m \cdot \infty} = 0. \tag{51}$$

Somit ist $C_1 = 0$ und $C_2 = \theta_F - C_1 = \theta_F$.
Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot e^{-m \cdot x}. \tag{52}$$

# Rippenwirkungsgrad

Der Rippenwirkungsgrad ist definiert als

$$\eta_R = \frac{\text{Übertragene Wärmemenge}}{\text{Maximal übertragene Wärmemenge}}, \tag{53}$$

wobei die maximale Wärmemenge, die die Rippe übertragen könnte, wenn ihre gesamte Oberfläche die Temperatur des Rippenfusses annehmen würde.

# Rippenwirkungsgrad

Für eine Rippe mit adiabatem Kopf gilt

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m \cdot (L - x))}{\cosh(m \cdot L)}, \tag{54}$$

und somit

$$\begin{aligned} \dot{Q} = \dot{Q}_F &= -\lambda \cdot S \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\lambda \cdot S \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \\ &= -\lambda \cdot S \cdot (-m) \cdot \theta_F \cdot \frac{\sinh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L)} \\ &= \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \tanh(m \cdot L). \end{aligned} \tag{55}$$

# Rippenwirkungsgrad

Die maximal übertragene Wärmemenge ist

$$Q_{\mathrm{max}} = \alpha \cdot A \cdot \theta_F = \alpha \cdot P \cdot L \cdot \theta_F. \tag{56}$$

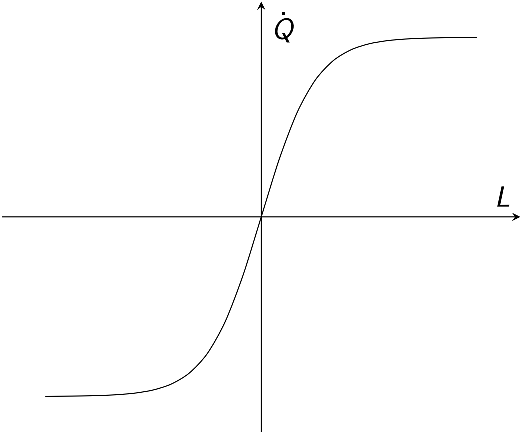
Der Wirkungsgrad ist dann

$$\begin{aligned} \eta_R &= \frac{\lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \tanh(m \cdot L)}{\alpha \cdot P \cdot L \cdot \theta_F} \\ &= \frac{m \cdot \tanh(m \cdot L)}{\frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S} \cdot L} \\ &= \frac{\tanh(m \cdot L)}{m \cdot L}, \end{aligned} \tag{57}$$

wobei $m^2 = \frac{P \cdot \alpha}{\lambda \cdot S}$.

# Rippenwirkungsgrad

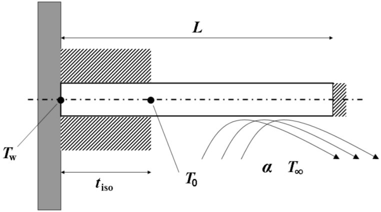
$$\dot{Q}_F = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \tanh(m \cdot L) \tag{58}$$



# Aufgabe (Prüfung Winter 2008, Aufgabe 1)

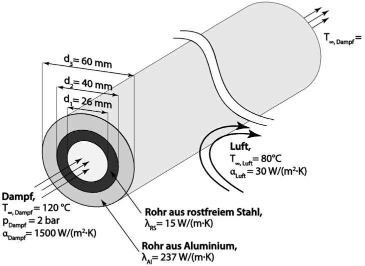
Eine zylindrische Rippe mit adiabatem Kopf, Durchmesser $D$ = 25 mm, Länge $L$ = 600 mm und einer Wärmeleitfähigkeit $\lambda$ = 60 W/(m K) ist senkrecht auf der Oberfläche einer Brennkammer mit der Wandtemperatur $T_w$ = 200°C angebracht. Ein Teil der Rippe wird von einer perfekt isolierenden Schicht der Dicke $t_{iso}$ = 200 mm bedeckt. Die umgebende Luft besitzt die Temperatur $T_\infty$ = 25°C und der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Luft und Rippe beträgt $\alpha$ = 15 W/(m$^2$ K).

Berechnen Sie die Temperatur $T_0$ der Rippe am Anfang der freien Rippenfläche (siehe Skizze).



# Aufgabe (Zwischenprüfung 2015, Aufgabe 1)

Das Haus von Familie Meier steht direkt neben einem Dampfkraftwerk. Die neu gebaute Sauna soll mit Dampf vom Kraftwerk beheizt werden. Der Dampf wird durch das Innere eines Heizrohres geleitet, welches durch die Sauna führt. Mit der an der Rohroberfläche abgegebenen Wärme wird die Sauna beheizt. Der Dampf kondensiert teilweise, wodurch seine Temperatur konstant bleibt. Eine einfache Version des Heizungsrohres ist wie folgt aufgebaut:




a) (3 Punkte) Skizzieren Sie den qualitativen Temperaturverlauf von der Mitte des Rohres bis zu r = 50 mm. Zeichnen Sie das Profil ins beigelegte Lösungsblatt ein und zeichnen Sie die Temperaturverläufe an den Übergängen deutlich.

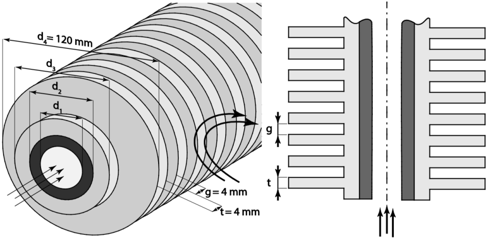
b) (2 Punkte) Skizzieren Sie das thermische Ersatzschaltwerk.

c) (5 Punkte) Berechnen Sie die Temperatur an der äusseren Oberfläche des Heizungsrohres (bei Durchmesser $d_3$).

d) (2 Punkte) Berechnen Sie die benötigte Länge des Heizungsrohres im Innern der Sauna, wenn im stationären Betrieb insgesamt 2kW an Wärme von der Sauna an die Umgebung verloren werden.

# Aufgabe (Zwischenprüfung 2015, Aufgabe 1)

Ein ETH - Ingenieur rät Familie Meier zum Einbau eines gerippten Heizungsrohres. Die Durchmesser $d_1$ bis $d_3$ sind gleich wie zuvor, über die ganze Oberfläche kann der angegebene Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_{\text{Luft}}$ angenommen werden. Die Dimensionen der auf dem ursprünglichen Rohr aufgesetzten Aluminiumrippen finden Sie in der Zeichnung.




Die Lösung für kreisförmige Rippen brauchen Sie nicht zu berechnen; nehmen Sie stattdessen einen Rippenwirkungsgrad $\eta_R$ von 94% als Lösung an.

$$\eta_R = \frac{\text{Real übertragene Wärmemenge, } \theta_{\text{Oberfläche}} = \theta(r)}{\text{Ideal übertragene Wärmemenge, falls } \theta_{\text{Oberfläche}} = \theta_F \text{ wäre}}$$

$$\dot{Q}_{\text{Rippe}} = A_{\text{Rippe}} \cdot \eta_R \cdot \alpha_{\text{Luft}} \cdot \theta_F$$

Nehmen Sie an, dass die Temperatur beim Durchmesser $d_3$ überall dieselbe ist.

e) (5 Punkte) Skizzieren Sie das neue thermische Ersatzschaltwerk und geben Sie die Gleichungen für die geänderten thermischen Widerstände an.

f) (4 Punkte) Um welchen Faktor ist die Wärmeabgabe pro Rohrlänge mit dem gerippten Rohr grösser als mit dem einfachen Rohr?

# Instationäre Wärmeleitungsgleichung - 0D

Für einen Körper mit

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} \ll 1 \tag{59}$$

kann die Wärmeleitung im Körper vernachlässigt werden. Somit folgt aus Energieerhaltung

$$\dot{E} = \dot{Q}, \tag{60}$$

d.h.

$$m \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha \cdot A \cdot (T - T_\infty). \tag{61}$$

oder umgeschrieben

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c} \cdot (T - T_\infty), \tag{62}$$

mit $m$ Masse, $c$ Wärmekapazität und $A$ Oberfläche.

# Instationäre Wärmeleitungsgleichung - 0D

Die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c} \cdot (T - T_\infty). \tag{63}$$

lautet

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T(t=0) - T_\infty} = \exp\left(-\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c} \cdot t\right). \tag{64}$$

Die Zeitkonstante des Systems ist also

$$\tau = \left(\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c}\right)^{-1} = \frac{m \cdot c}{\alpha \cdot A}. \tag{65}$$

# Instationäre Wärmeleitungsgleichung - 1D

Für den eindimensionalen Fall bekommt man

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{66}$$

Mit $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{67}$$

Die Randbedingungen (Spezialfall) lauten

$$t < 0 \qquad T = T_i, \tag{68}$$

$$t = 0 \qquad T = T_s \text{ für } x = 0, T = T_i \text{ für } x > 0, \tag{69}$$

$$t, x \to \infty \qquad T = T_i. \tag{70}$$

# Instationäre Wärmeleitungsgleichung - 1D

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung lautet

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\eta} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \operatorname{erf}(\eta), \tag{71}$$

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_s - T_i} = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta), \tag{72}$$

mit

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot a \cdot t}}. \tag{73}$$

Die Diffusionslänge ist Stelle, bei der $\eta = 0.5$:

$$x_D = \sqrt{a \cdot t_D}, \tag{74}$$

wobei $t_D$ Diffusionszeit.

# Aufgabe (Prüfung Winter 2008, Aufgabe 2)

Ein sehr langer Draht mit Durchmesser $D$ = 1 mm befindet sich in einem Ölbad der konstanten Temperatur $T_\infty$ = 25°C und wird durch einen elektrischen Strom, der durch den Draht fliesst, aufgewärmt. Anfangs besitzt der Draht dieselbe Temperatur wie das Ölbad. Betrachten Sie ein Stück dieses Drahtes und vernachlässigen Sie Wärmeübertragung in axialer Richtung des Drahtes. Der Draht hat einen elektrischen Widerstand pro Länge von $R'$ = 0.01 Ω/m. Der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Draht und Umgebung ist $\alpha = 500$ W/(m² K).

a) Wie kann dieses Problem modelliert werden? Berechnen Sie dazu die Biot-Zahl und begründen Sie damit entsprechend (kurze Begründung in Worten).

b) Wenn ein Strom von $I$ = 100 A durch den Draht fliesst, wie lautet dann die Temperatur des Drahtes im stationären Zustand?

c) Betrachten Sie nun den Draht während des (instationären) Aufheizens durch den elektrischen Strom. Anfangs gilt für die Drahttemperatur $T(t=0)=T_\infty$. Stellen Sie dazu eine geeignete Energiebilanz für den Draht auf.

   Leiten Sie daraus eine einfache, zeitabhängige Differentialgleichung für die Variable $\Theta^* = T - T_\infty - \frac{R' \cdot I^2}{\alpha \cdot \pi \cdot D}$ ab ($T$ ist die Temperatur des Drahtes).

d) Zeigen Sie, dass sich aus dieser Differentialgleichung folgende Beziehung zwischen $\Theta^*$ und der Zeit $t$ ableiten lässt:

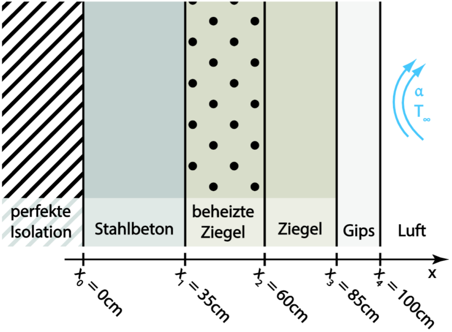
$$t = -\frac{D \cdot \rho \cdot c}{4 \cdot \alpha} \cdot \ln\left(-\Theta^* \cdot \frac{D \cdot \pi \cdot \alpha}{R' \cdot I^2}\right)$$

e) Wie lange dauert es, bis der Draht von $T(t=0)=T_\infty$ beginnend nur noch ein 1°C von der stationären Temperatur entfernt ist?

Eigenschaften des Drahtes: $\rho = 8000$ kg/m³, c = 500 J/(kg K), $\lambda = 20$ W/(m K)

# Aufgabe (Zwischenprüfung 2015, Aufgabe 2)

Betrachten Sie die in der Abbildung gezeigte ebene Wand. Die Ziegelsteine der inneren Schicht werden mit warmer Luft durchflutet, was als gleichmässige Wärmequelle $\dot{q}'''_{\text{Quelle}} = 80\ ^{W}/_{m^3}$ betrachtet werden kann. Die Wärmeleitfähigkeiten der verschiedenen Materialien finden Sie in der Tabelle weiter unten.




| Material | $\lambda[^{W}/_{mK}]$ |
|---|---|
| Stahlbeton | 2.3 |
| Ziegel | 0.7 |
| Gips | 0.25 |

# Aufgabe (Zwischenprüfung 2015, Aufgabe 2)

a) (7 Punkte) Vor dem Einschalten der Wandheizung habe die ganze Wand Raumtemperatur $T_\infty$. Zeichnen Sie qualitative Temperaturprofile von $x_0$ bis zu $x$ = 1.2m zu folgenden Zeitpunkten:
(Zeichnen Sie die Profile gross genug, damit man die Steigungen klar erkennen kann. Verwenden Sie für gerade Linien einen Lineal und zeichnen Sie alle Profile in dieselbe Zeichnung aufs beigelegte Lösungsblatt ein.)

t0) Vor dem Einschalten der Wandheizung.
t1) Etwa eine Minute nach dem Einschalten.
t2) Rund 10min nach dem Einschalten.
t3) Sehr lange (mehrere Tage) nachdem die Heizung eingeschaltet wurde.

b) (2 Punkte) Zeichnen Sie den Temperaturverlauf von $t_0$ bis $t_3$ in der Mitte des Stahlbetons. (Benützen Sie das beigelegte Lösungsblatt.)

c) (6 Punkte) Berechnen Sie für den stationären Fall die Temperatur in der Mitte der beheizten Ziegelschicht. Die Temperatur in der Mitte des Stahlbetons ist $T_{SB,m}$ = 60°C.

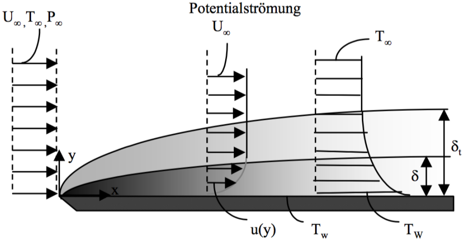
# Konvektion

- Bis jetzt:

$$\dot{Q}'' = \alpha \cdot (T - T_\infty), \tag{75}$$

  wobei $\alpha$ gegeben war.

- In der Realität hängt $\alpha$ sehr stark von der Strömung ab.



# Reynold-Zahl

Die Reynold-Zahl ist definiert als

$$\text{Re} = \frac{u_\infty \cdot \rho \cdot L}{\eta} = \frac{u_\infty \cdot L}{\nu}, \tag{76}$$

mit:

- $u_\infty$: Strömungsgeschwindigkeit;
- $L$: Charakteristische Länge des Körpers;
- $\rho$: Dichte;
- $\eta$ : Kinematische Viskosität;
- $\nu = \rho \cdot \eta$ : Dynamische Viskosität.

# Prandtl-Zahl

Die Prandtl-Zahl ist definiert als

$$\mathrm{Pr} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda}, \tag{77}$$

mit:

- $\eta$ : Kinematische Viskosität;
- $c_p$: Spezifische Wärme;
- $\lambda$: Wärmeleitfähigkeit (des Fluids).

# Nusselt-Zahl

Die Nusselt-Zahl ist definiert als

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}, \tag{78}$$

mit:

- $\alpha$ : Wärmeübertragungskoeffizient;
- $L$: Charakteristische Länge;
- $\lambda$: Wärmeleitfähigkeit (des Fluids), d.h. $\mathrm{Nu} \neq \mathrm{Bi}$.

# Nusselt-Zahl Vorgehen

- Oft gegeben ist
$$\mathrm{Nu}_x = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \ldots), \tag{79}$$
z.B. $\mathrm{Nu}_x = C \cdot \mathrm{Re}^n \cdot \mathrm{Pr}^m$.
- Daraus folgt
$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha(x) \cdot x}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \alpha(x) = \frac{\mathrm{Nu}_x \cdot \lambda}{x}. \tag{80}$$
- $\bar{\alpha}$ kann mit
$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x(x)\,\mathrm{d}x \tag{81}$$
berechnet werden.

# Mittlere Temperaturdifferenz

Die mittlere Temperaturdifferenz ist

$$\overline{\Delta T} = \frac{\Delta T_a - \Delta T_e}{\ln(\Delta T_a / \Delta T_e)}, \tag{82}$$

mit $\Delta T_a = T_a - T_\infty$ und $\Delta T_e = T_e - T_\infty$.

**Alternativ:** Intergration für infinitesimale Dicke.

# Aufgabe (Prüfung Sommer 2009, Aufgabe 1)

Ein Gebäude mit einer Breite von 10 m besitzt 10 aneinandergereihte Fensterscheiben von jeweils 1 m Breite und 2 m Höhe (Abb. 1). Wind (Luft) mit einer Geschwindigkeit von $u_\infty$ = 7.5 m/s bläst an den Fenstern entlang. Die kritische Reynoldszahl für den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung beträgt $Re_{x,c} = 5 \cdot 10^5$.

Die Eigenschaften der Luft sind: $\nu = 15.89 \cdot 10^{-6}$ m²/s, $\lambda = 0.0263$ W/(m·K), Pr = 0.707

a) Bestimmen Sie den Ort des Übergangs von laminarer zu turbulenter Strömung.

Für eine laminare Strömung kann folgende Beziehung für die gemittelte Nusseltzahl zwischen dem Anströmpunkt an der Hauskante und der Stelle x (von 0 bis x) verwendet werden:

$$\overline{Nu_{0-x}} = 0.664 \cdot \mathrm{Re}_x^{1/2} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \qquad \text{für} \qquad 0 < Re_x < Re_{x,c}$$

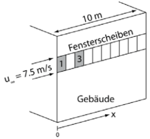
Für eine gemischte Strömung (laminare und turbulente Strömung) kann folgende Beziehung für die gemittelte Nusseltzahl zwischen dem Anströmpunkt an der Hauskante und der Stelle x (von 0 bis x) verwendet werden:

$$\overline{Nu_{0-x}} = (0.037 \cdot \mathrm{Re}_x^{4/5} - 871) \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \qquad \text{für} \qquad Re_{x,c} < Re_x < 10^8$$

b) Bestimmen Sie den gemittelten Wärmeübergangskoeffizienten für das erste Fenster.

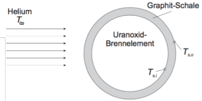
c) Bestimmen Sie den über die ersten drei Fenster gemittelten Wärmeübergangskoeffizienten.

d) Bestimmen Sie den gemittelten Wärmeüberganskoeffizienten für das dritte Fenster.



# Aufgabe (Prüfung Sommer 2007, Aufgabe 2)

Ein Hochtemperatur-Gas-Reaktor (HTGR) besteht aus kugelförmigen Uranoxid-Elementen, die eine uniforme volumetrische Wärmequelle $\dot{q}'''$ enthalten. Jedes Brennelement ist in eine Schale aus Graphit eingebettet, die durch einen Heliumgasstrom bei 1 atm gekühlt wird.
Betrachten Sie ein Brennelement im stationären Zustand unter Vernachlässigung von Wärmestrahlung, wenn die Gasgeschwindigkeit $u = 20\ \mathrm{m/s}$ und die –temperatur $T_\infty = 500\ \mathrm{K}$, der Durchmesser des Brennelements $D_\mathrm{i} = 10\ \mathrm{mm}$ und der Graphitschale $D_\mathrm{o} = 12\ \mathrm{mm}$, und die Oberflächentemperatur der Graphitschale $T_{\mathrm{s,o}} = 1300\ \mathrm{K}$ sind. Die Wärmeleitfähigkeit von Uranoxid und Graphit sei $\lambda_\mathrm{U} = \lambda_\mathrm{G} = 2\ \mathrm{W/(m\,K)}$.




Die Nusseltzahl für die Umströmung einer Kugel ist gegeben als:

$$\overline{Nu_D} = 2 + \left(0.4 \cdot \mathrm{Re}_D^{1/2} + 0.06 \cdot \mathrm{Re}_D^{2/3}\right) \cdot \mathrm{Pr}^{0.4} \cdot \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_\mathrm{s}}\right)^{1/4}$$

Stoffeigenschaften von Helium bei 500 K und 1 atm:

$$\nu = 290 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}, \quad \lambda = 0.22\ \mathrm{W/(m\,K)}, \quad \mathrm{Pr} = 0.67$$

$$\mu_\infty = 283 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Pa\,s}, \quad \text{bei 1300 K:} \quad \mu_\mathrm{s} = 592 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Pa\,s}$$

a) Bestimmen Sie den Wärmestrom von einem Brennelement an die Gasströmung (in W).

b) Wie gross ist die volumetrische Wärmequelle im Brennelement und was ist die Temperatur an der Uranoxid-Graphit-Grenzfläche $T_{\mathrm{s,i}}$?

c) Finden Sie einen Ausdruck für die radiale Temperaturverteilung $T(r)$ im Brennelement als Funktion von Variablen (ohne Zahlenwerte). Bestimmen Sie anschliessend die Temperatur im Mittelpunkt des Brennelements $T(0)$ in K.

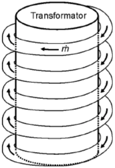
Hinweis: Der Wärmeleitwiderstand durch eine Kugelschale ist:

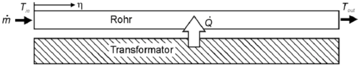
$$R_\mathrm{Leit} = \frac{1}{4\pi \cdot \lambda_\mathrm{Schale}} \cdot \left(\frac{1}{r_\mathrm{innen}} - \frac{1}{r_\mathrm{aussen}}\right) \qquad [R_\mathrm{Leit}] = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

# Aufgabe (Prüfung Sommer 2007, Aufgabe 2)

Ein elektrischer Transformator von $300\,mm$ Durchmesser und $500\,mm$ Höhe gibt $1000\,W$ Wärmeleistung ab. Um seine Oberflächentemperatur auf $47°C$ zu halten, wird eine dickwandige, aufgelötete Rohrwicklung mit $20\,mm$ Innendurchmesser mit Glyzerin von $24°C$ gespiesen. Es wird angenommen, dass die gesamte vom Transformator dissipierte Wärme vom Glycerin absorbiert wird.
Berechnen Sie unter Annahme einer maximal möglichen Temperaturzunahme der Kühlflüssigkeit von $6K$ und voll ausgebildeter Strömung in der Rohrleitung den notwendigen Kühlmittelmassenstrom, die Gesamtlänge der Leitung und den Abstand S zwischen zwei Umläufen der Wicklung.

Stoffwerte von Glycerin bei 300 K: $c_p = 2427\,J/(kg \cdot K)$; $\mu = 79.9 \cdot 10^{-2}\,Ns/m^2$; $\lambda = 0.286\,W/(m \cdot K)$; $Pr = 6780$; $\rho = 1259.9\,kg/m^3$



# Tipps für die Prüfung

- Üben, üben, üben, üben, ...
- Alte Prüfungen/Zwischenprüfungen (und Serien) lösen;
- Fragen?

lnicolas@student.ethz.ch

# Viel Erfolg!