Thermodynamik II - Übung 10

Nicolas Lanzetti

Heutige Themen

- Zusammenfassung letzter Woche;
- Konvektion.

Zusammenfassung letzter Woche

Für einen Körper mit

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} \ll 1 \tag{1}$$

kann die Wärmeleitung im Körper vernachlässigt werden. Somit folgt aus Energieerhaltung

$$\dot{E} = \dot{Q}, \tag{2}$$

d.h.

$$m \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha \cdot A \cdot (T - T_\infty). \tag{3}$$

oder umgeschrieben

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c} \cdot (T - T_\infty), \tag{4}$$

mit m Masse, c Wärmekapazität und A Oberfläche.

Zusammenfassung letzter Woche

Die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c} \cdot (T - T_\infty). \tag{5}$$

lautet

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T(t=0) - T_\infty} = \exp\left(-\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c} \cdot t\right). \tag{6}$$

Die Zeitkonstante des Systems ist also

$$\tau = \left(\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c}\right)^{-1} = \frac{m \cdot c}{\alpha \cdot A}. \tag{7}$$

Zusammenfassung letzter Woche

Für den eindimensionalen Fall bekommt man

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Mit $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Die Randbedingungen (Spezialfall) lauten

$$t < 0 \qquad T = T_i, \tag{10}$$

$$t = 0 \qquad T = T_s \text{ für } x = 0, T = T_i \text{ für } x > 0, \tag{11}$$

$$t, x \to \infty \qquad T = T_i. \tag{12}$$

Zusammenfassung letzter Woche

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung lautet

$$\frac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\eta} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \operatorname{erf}(\eta), \tag{13}$$

$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_s-T_i} = 1-\operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta), \tag{14}$$

mit

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\cdot a\cdot t}}. \tag{15}$$

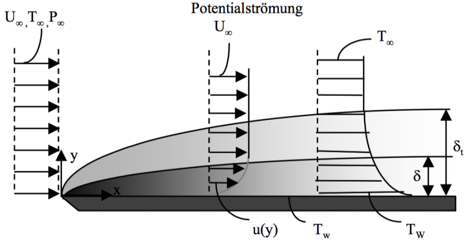
Die Diffusionslänge ist Stelle, bei der $\eta = 0.5$:

$$x_D = \sqrt{a\cdot t_D}, \tag{16}$$

wobei t_D Diffusionszeit.

Konvektion

- Bis jetzt:
$$\dot{Q}'' = \alpha \cdot (T - T_\infty), \tag{17}$$
wobei α gegeben war.
- In der Realität hängt α sehr stark von der Strömung ab.



Reynold-Zahl

Die Reynold-Zahl ist definiert als

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty \cdot \rho \cdot L}{\eta} = \frac{u_\infty \cdot L}{\nu}, \tag{18}$$

mit:

- u_∞: Strömungsgeschwindigkeit;
- L: Charakteristische Länge des Körpers;
- ρ: Dichte;
- η : Kinematische Viskosität;
- $\nu = \rho \cdot \eta$: Dynamische Viskosität.

Prandtl-Zahl

Die Prandtl-Zahl ist definiert als

$$\mathrm{Pr} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda}, \tag{19}$$

mit:

- η : Kinematische Viskosität;
- c_p: Spezifische Wärme;
- λ: Wärmeleitfähigkeit (des Fluids).

Nusselt-Zahl

Die Nusselt-Zahl ist definiert als

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}, \tag{20}$$

mit:

- α : Wärmeübertragungskoeffizient;
- L: Charakteristische Länge;
- λ: Wärmeleitfähigkeit (des Fluids), d.h. $\mathrm{Nu} \neq \mathrm{Bi}$.

Nusselt-Zahl Vorgehen

- Oft gegeben ist
$$\mathrm{Nu}_x = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \ldots), \tag{21}$$
z.B. $\mathrm{Nu}_x = C \cdot \mathrm{Re}^n \cdot \mathrm{Pr}^m$.
- Daraus folgt
$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha(x) \cdot x}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \alpha(x) = \frac{\mathrm{Nu}_x \cdot \lambda}{x}. \tag{22}$$
- $\bar{\alpha}$ kann mit
$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x(x)\,\mathrm{d}x \tag{23}$$
berechnet werden.

Natürliche Konvektion

- Grashof-Zahl:

$$\mathrm{Gr}_H = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_W - T_\infty) \cdot H^3}{\nu^2}, \tag{24}$$

mit $g = 9.81\,{}^{\mathrm{m}^2}\!/\mathrm{s}$ und thermischer Ausdehnungskoeffizient $\beta = 1/T$ (ideale Gase).

- Rayleigh-Zahl:

$$\mathrm{Ra}_H = \mathrm{Gr}_H \cdot \mathrm{Pr}. \tag{25}$$

- Für $\mathrm{Ra}_H < \mathrm{Ra}_{H,\mathrm{krit}} = 10^9$:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_H = \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr} + 0.986 \cdot \mathrm{Pr}^{1/2} + 0.492}\right)^{1/4} \cdot \mathrm{Ra}_H^{1/4}. \tag{26}$$

Für $\mathrm{Ra}_H > \mathrm{Ra}_{H,\mathrm{krit}} = 10^9$:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_H = 0.13 \cdot \mathrm{Ra}_H^{1/3}. \tag{27}$$

Mittlere Temperaturdifferenz

Die mittlere Temperaturdifferenz ist

$$\overline{\Delta T} = \frac{\Delta T_a - \Delta T_e}{\ln(\Delta T_a / \Delta T_e)}, \tag{28}$$

mit $\Delta T_a = T_a - T_\infty$ und $\Delta T_e = T_e - T_\infty$.

Alternativ: Intergration für infinitesimale Dicke.

Fragen?