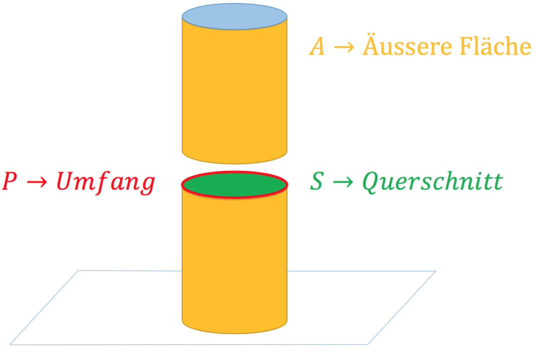
Thermodynamik II - Übung 9

Nicolas Lanzetti

Heutige Themen

- Zusammenfassung letzter Woche;
- Instationäre Wärmeleitungsgleichung 0D;
- Instationäre Wärmeleitungsgleichung 1D;
- Konvektion.

Zusammenfassung letzter Woche



Zusammenfassung letzter Woche

Energieerhaltung auf ein Kontrollvolumen zylinderisches Kontrollvolumen liefert die Rippengleichung:

$$
\begin{aligned}
\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \cdot T\right) = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial x}(S \cdot u \cdot T) \\
- \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \\
- \dot{Q}''_{\text{Strahlung}} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Zusammenfassung letzter Woche

Vereinfachungen:

- Querschnitt S ist constant;
- Kein Fliessen von Material in der Rippe;
- Stationär;
- Keine Wärmequelle;
- Keine Strahlung.

$$\cancel{\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \cdot T\right)} = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) \cancel{- \rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial x}(S \cdot u \cdot T)}$$
$$- \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) + \cancel{\dot{Q}'''_{\text{Quellen}} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}}$$
$$\cancel{- \dot{Q}''_{\text{Strahlung}} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}} \qquad (2)$$

Zusammenfassung letzter Woche

Daraus folgt (mit $\mathrm{d}A = P \cdot \mathrm{d}x$)

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - P \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{P \cdot \alpha}{\lambda \cdot S} \cdot (T - T_\infty) = 0 \tag{4}$$

Mit $\theta = T - T_\infty$ und $m^2 = \frac{P \cdot \alpha}{\lambda \cdot S}$:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2 \cdot \theta = 0. \tag{5}$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\theta(x) = C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot x}. \tag{6}$$

Zusammenfassung letzter Woche

Mit bekannter Fusstemperatur T_F folgt:

$$T(x=0) = T_F \qquad \Rightarrow \qquad \theta(x=0) = T_F - T_\infty = \theta_F \tag{7}$$

Einsertzen liefert:

$$\theta(x=0) = C_1 + C_2 = \theta_F. \tag{8}$$

Für die zweite Randbedingung gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Adiabater Kopf;
- Konvektion am Kopf;
- Bekannte Temperatur am Kopf;
- Unendliche lange Rippe.

Zusammenfassung letzter Woche

Für eine Rippe mit Länge L mit adiabatem Kopf ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0, \tag{9}$$

d.h.

$$C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = 0. \tag{10}$$

Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m \cdot (L - x))}{\cosh(m \cdot L)}, \tag{11}$$

wobei $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ und $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

Zusammenfassung letzter Woche

Für eine Rippe mit Länge L ist

$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = \alpha \cdot \underbrace{(T(x=L) - T_\infty)}_{\theta(x=L)} = \alpha \cdot \theta(x=L), \tag{12}$$

d.h.

$$C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (C_1 \cdot e^{m \cdot L} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L}). \tag{13}$$

Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m \cdot (L-x)) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \sinh(m \cdot (L-x))}{\cosh(m \cdot L) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \sinh(m \cdot L)}. \tag{14}$$

Zusammenfassung letzter Woche

Für eine Rippe mit Länge L ist

$$\theta(x = L) = \theta_K = T_K - T_\infty, \tag{15}$$

d.h.

$$C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L} = \theta_K. \tag{16}$$

Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\frac{\theta_K}{\theta_F} \cdot \sinh(m \cdot x) + \sinh(m \cdot (L - x))}{\sinh(m \cdot L)}. \tag{17}$$

Zusammenfassung letzter Woche

Für eine Rippe mit Länge $L \to \infty$ ist

$$T(x \to \infty) = T_\infty. \quad (18)$$

d.h.

$$C_1 \cdot e^{m \cdot \infty} + \cancel{C_2 \cdot e^{-m \cdot \infty}} = 0. \quad (19)$$

Somit ist $C_1 = 0$ und $C_2 = \theta_F - C_1 = \theta_F$.
Der Temperaturprofil ist dann

$$\theta(x) = \theta_F \cdot e^{-m \cdot x}. \quad (20)$$

Zusammenfassung letzter Woche

Der Rippenwirkungsgrad ist definiert als

$$\eta_R = \frac{\text{Übertragene Wärmemenge}}{\text{Maximal übertragene Wärmemenge}}, \tag{21}$$

wobei die maximale Wärmemenge, die die Rippe übertragen könnte, wenn ihre gesamte Oberfläche die Temperatur des Rippenfusses annehmen würde.
Für eine Rippe mit adiabatem Kopf:

$$\eta_R = \frac{\tanh(m \cdot L)}{m \cdot L}. \tag{22}$$

Instationäre Wärmeleitungsgleichung - 0D

Für einen Körper mit

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} \ll 1 \tag{23}$$

kann die Wärmeleitung im Körper vernachlässigt werden. Somit folgt aus Energieerhaltung

$$\dot{E} = \dot{Q}, \tag{24}$$

d.h.

$$m \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha \cdot A \cdot (T - T_\infty). \tag{25}$$

oder umgeschrieben

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c} \cdot (T - T_\infty), \tag{26}$$

mit m Masse, c Wärmekapazität und A Oberfläche.

Instationäre Wärmeleitungsgleichung - 0D

Die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c} \cdot (T - T_\infty). \tag{27}$$

lautet

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T(t=0) - T_\infty} = \exp\left(-\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c} \cdot t\right). \tag{28}$$

Die Zeitkonstante des Systems ist also

$$\tau = \left(\frac{\alpha \cdot A}{m \cdot c}\right)^{-1} = \frac{m \cdot c}{\alpha \cdot A}. \tag{29}$$

Instationäre Wärmeleitungsgleichung - 1D

Für den eindimensionalen Fall bekommt man

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{30}$$

Mit $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{31}$$

Die Randbedingungen (Spezialfall) lauten

$$t < 0 \qquad T = T_i, \tag{32}$$

$$t = 0 \qquad T = T_s \text{ für } x = 0, T = T_i \text{ für } x > 0, \tag{33}$$

$$t, x \to \infty \qquad T = T_i. \tag{34}$$

Instationäre Wärmeleitungsgleichung - 1D

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung lautet

$$\frac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\eta} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \mathrm{erf}(\eta), \tag{35}$$

$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_s-T_i} = 1-\mathrm{erf}(\eta) = \mathrm{erfc}(\eta), \tag{36}$$

mit

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot a \cdot t}}. \tag{37}$$

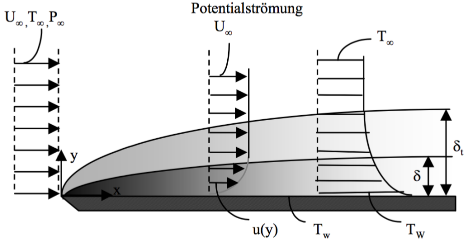
Die Diffusionslänge ist Stelle, bei der $\eta = 0.5$:

$$x_D = \sqrt{a \cdot t_D}, \tag{38}$$

wobei t_D Diffusionszeit.

Konvektion

- Bis jetzt:
$$\dot{Q}'' = \alpha \cdot (T - T_\infty), \tag{39}$$
wobei α gegeben war.
- In der Realität hängt α sehr stark von der Strömung ab.



Reynold-Zahl

Die Reynold-Zahl ist definiert als

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty \cdot \rho \cdot L}{\eta} = \frac{u_\infty \cdot L}{\nu}, \tag{40}$$

mit:

- u_∞: Strömungsgeschwindigkeit;
- L: Charakteristische Länge des Körpers;
- ρ: Dichte;
- η : Kinematische Viskosität;
- $\nu = \rho \cdot \eta$: Dynamische Viskosität.

Prandtl-Zahl

Die Prandtl-Zahl ist definiert als

$$\mathrm{Pr} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda}, \tag{41}$$

mit:

- η : Kinematische Viskosität;
- c_p: Spezifische Wärme;
- λ: Wärmeleitfähigkeit (des Fluids).

Nusselt-Zahl

Die Nusselt-Zahl ist definiert als

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}, \tag{42}$$

mit:

- α : Wärmeübertragungskoeffizient;
- L: Charakteristische Länge;
- λ: Wärmeleitfähigkeit (des Fluids), d.h. $\mathrm{Nu} \neq \mathrm{Bi}$.

Nusselt-Zahl Vorgehen

- Oft gegeben ist

$$\mathrm{Nu}_x = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \ldots), \tag{43}$$

z.B. $\mathrm{Nu}_x = C \cdot \mathrm{Re}^n \cdot \mathrm{Pr}^m$.

- Daraus folgt

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha(x) \cdot x}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \alpha(x) = \frac{\mathrm{Nu}_x \cdot \lambda}{x}. \tag{44}$$

- $\bar{\alpha}$ kann mit

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x(x)\,\mathrm{d}x \tag{45}$$

berechnet werden.

Zwischenprüfung

- Nächste Woche: **obligatorische** Zwischenprüfungen (15%);
- Weitere Infos (genaue Zeit, Räume) folgen während dieser Woche;
- Erlaubte Hilfsmitteln:
  - Tabellen;
  - Institutformelsammlung LAV und Institutformelsammlung LTNT;
  - 8 Blätter eingene Zusammenfassung (keine Müsterlösungen);
  - Taschenrechner gemäss Einschränkungen.
- Alte Klausuren lösen;
- Übungen gut verstehen;
- Fragen: Sprechstunde, Übung oder lnicolas@student.ethz.ch.

Fragen?