ETH zürich

Thermodynamik II - Übung 7

Nicolas Lanzetti

Heutige Themen

- Zusammenfassung letzter Woche;
- Wärmewiderstände;
- Biot-Zahl.

Zusammenfassung letzter Woche

Es wird folgende Notation benutzt:

Symbol	Beschreibung	Einheit
$\dot{Q}$	Wärmestrom	W
$\dot{Q}'$	Wärmestrom pro Länge	$^{\mathrm{W}}/_{\mathrm{m}}$
$\dot{Q}''$	Wärmestrom pro Fläche	$^{\mathrm{W}}/_{\mathrm{m}^2}$
$\dot{Q}'''$	Wärmestrom pro Volumen	$^{\mathrm{W}}/_{\mathrm{m}^3}$

Zusammenfassung letzter Woche

Es gibt drei Wege, Wärme zu übertragen:

- Wärmeleitung (conduction):

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}; \tag{1}$$

- Konvektion (convection):

$$\dot{Q}'' = \alpha \cdot (T_s - T_\infty); \tag{2}$$

- Strahlung (radiation):

$$\dot{Q}'' = \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4). \tag{3}$$

Zusammenfassung letzter Woche

Energieerhaltung auf ein infinitesimales Kontrollvolumen und Fourier'sche Gesetz

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \tag{4}$$

liefern die Wärmeleitungsgleichung

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}, \tag{5}$$

mit $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$.

Zusammenfassung letzter Woche

- **Kartesische Koordinaten:**
$$\rho\cdot c\cdot\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$
- **Zylindrische Koordinaten:**
$$\rho\cdot c\cdot\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\cdot r\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$
- **Kugelkoordinaten:**
$$\rho\cdot c\cdot\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\cdot r^2\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin^2\phi}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin\phi}\cdot\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\cdot\sin\phi\cdot\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$

Zusammenfassung letzter Woche

Vereinfachungen für die Wärmeleitungsgleichung:

- $\lambda =$ konst.:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \Delta T + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}; \tag{6}$$

- Stationär: $\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = 0;$
- 1-Dimensional: $\frac{\partial}{\partial x}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) = 0;$
- Rotationssymmetrisch: $\frac{\partial}{\partial \phi}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) = 0;$
- Unendlich lang: $\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) = 0;$
- Keinen Quellen: $\dot{Q}'''_{\text{Quellen}} = 0.$

Zusammenfassung letzter Woche

Das Lösen von der Wärmeleitungsgleichung braucht Anfangsbedingungen/Randbedingungen. Hier vier Beispiele:

- Konstante Oberflächentemperatur:

$$T(x=0) = T_s. \tag{7}$$

- Konstanter Wärmestrom:

$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \dot{Q}_s''. \tag{8}$$

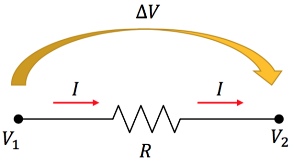
- Adiabate oder isolierte Fläche:

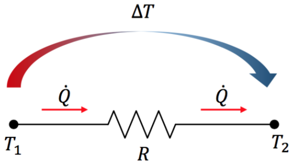
$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0. \tag{9}$$

- Konvektion bei der Oberfläche:

$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \pm\alpha \cdot (T(x=0) - T_\infty). \tag{10}$$

Analogie zu der Elektrotechnik





- In der Elektrotechnik:

$$\Delta V = I \cdot R. \tag{11}$$

- In der Termodynamik:

$$\Delta T = \dot{Q} \cdot R_{\text{thermisch}}. \tag{12}$$

Analogie zu der Elektrotechnik

Die stationäre eindimensionale Wärmeleitungsgleichung ($\lambda = \text{const.}$, $\dot{Q}''' = 0$) lautet

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0. \tag{13}$$

Mit den Randbedingungen $T(x=0) = T_{\text{high}}$ und $T(x=L) = T_{\text{low}}$ folgt

$$T(x) = T_{\text{high}} + (T_{\text{low}} - T_{\text{high}}) \cdot \frac{x}{L}. \tag{14}$$

Der Wärmestrom ist

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{T_{\text{low}} - T_{\text{high}}}{L}. \tag{15}$$

Analogie zu der Elektrotechnik

Somit folgt für den Wärmestrom

$$\dot{Q} = \lambda \cdot A \cdot \frac{T_{\text{high}} - T_{\text{low}}}{L} \tag{16}$$

oder

$$\underbrace{T_{\text{high}} - T_{\text{low}}}_{\Delta T} = \dot{Q} \cdot \frac{L}{A \cdot \lambda}. \tag{17}$$

Der Wärmewiderstand ist somit

$$R_{\text{Wand}} = \frac{L}{A \cdot \lambda} \tag{18}$$

und hat Einheit $^{\text{K}}/_{\text{W}}$.

Wärmewiderstände

Die Wärmewiderstande sind:

- ebene Wand:

$$R_{\text{eben}} = \frac{b}{A \cdot \lambda}, \tag{19}$$

  mit b Dicke der Wand;

- zylindrische Wand:

$$R_{\text{zyl}} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \cdot \lambda \cdot L}, \tag{20}$$

  mit L Länge des Zylinders.

- konvektiv:

$$R_{\text{konv}} = \frac{1}{A \cdot \alpha}, \tag{21}$$

  aus $\dot{Q} = A \cdot \alpha \cdot (T_s - T_\infty)$.

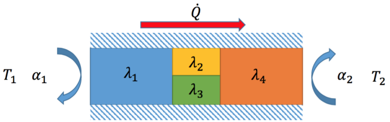
Wärmewiderstände

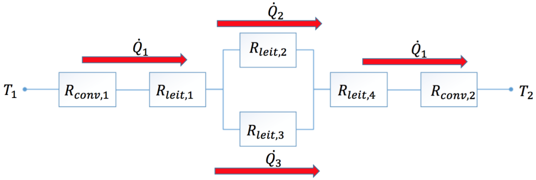
Man darf die Wärmewiderstand nutzen, wenn das Problem folgende Voraussetzungen erfüllt:

- stationär;
- eindimensional;
- keine Wärmequelle (dünne Heizfolie ist erlaubt).

Zusätzlich bekommt man mit diesem Verfahren kein Temperaturprofil.

Serie- und Parallelschaltung

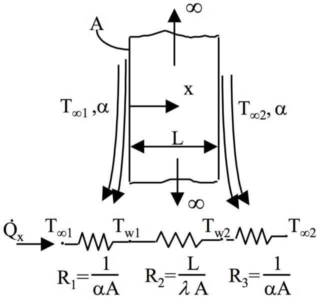




$$R_{\text{tot}} = R_{\text{conv},1} + R_{\text{leit},1} + \frac{R_{\text{leit},2} \cdot R_{\text{leit},3}}{R_{\text{leit},2} + R_{\text{leit},3}} + R_{\text{leit},4} + R_{\text{conv},2}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_{\text{tot}}}.$$

Beispiel



Der Wärmestrom ist

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{A \cdot \alpha} + \frac{L}{\lambda \cdot A} + \frac{1}{A \cdot \alpha}}. \tag{22}$$

Beispiel

Für die Temperatur T_{w1} gilt es:

$$T_{\infty 1} - T_{w1} = \dot{Q} \cdot R_1 \tag{23}$$

Daraus folgt

$$T_{w1} = T_{\infty 1} - \underbrace{\frac{L}{\lambda \cdot A} \cdot \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{A \cdot \alpha} + \frac{L}{\lambda \cdot A} + \frac{1}{A \cdot \alpha}}}_{\text{Temperatursabfall über } R_1} . \tag{24}$$

Das ist analog zu dem Spannungsteiler:

$$V_{w1} = V_1 - \underbrace{\frac{R_1}{R_{\text{tot}}} \cdot (V_1 - V_2)}_{\text{Spannungsabfall über } V_1} . \tag{25}$$

Biot-Zahl

Die Biot-Zahl ist definiert als

$$\mathrm{Bi} = \frac{R_{\text{leit}}}{R_{\text{conv}}} = \frac{\frac{L}{A \cdot \lambda}}{\frac{1}{A \cdot \alpha}} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}, \tag{26}$$

mit L charakteristische Länge. Dei Biot-Zahl ist ein Mass, um zu entscheiden welcher Wärmeübertragung dominant ist:

- $\mathrm{Bi} \ll 1$: Konvektion ist dominant;
- $\mathrm{Bi} \approx 1$: keine dominante Wärmeübertragung;
- $\mathrm{Bi} \gg 1$: Wärmeleitung ist dominant.

Fragen?