Thermodynamik II - Übung 6

Nicolas Lanzetti

Heutige Themen

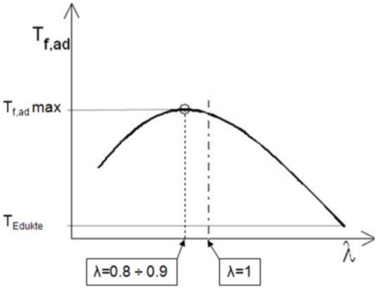
- Wärmeübertragung;
- Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkungen zu der Zwischenprüfung

- Die Reaktionsenthalpie bei $T = T_{\text{ref}}$ ist definiert als

$$\Delta H_R\big|_{T_{\text{ref}}} = \sum (v'' - v') \cdot h_f^0 \tag{1}$$

  Die Reaktionswärme ist dann $Q_R = -\Delta H_R$.
- Die Kurve $T_{f,\text{ad}}(\lambda)$ ist **nicht** symmetrisch!



Notation

Es wird folgende Notation benutzt:

Symbol	Beschreibung	Einheit
$\dot{Q}$	Wärmestrom	W
$\dot{Q}'$	Wärmestrom pro Länge	W/m
$\dot{Q}''$	Wärmestrom pro Fläche	W/m^2
$\dot{Q}'''$	Wärmestrom pro Volumen	W/m^3

Wärmeübertragung

Es gibt drei Wege, Wärme zu übertragen:

- Wärmeleitung (conduction);
- Konvektion (convection);
- Strahlung (radiation).

Wärmeleitung

Wärmeleitung wird von dem Fourier'sche Gesetzt beschrieben:

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}, \tag{2}$$

wobei λ der Wärmeleitfähigkeit/Wärmeleitungskoeffizient ist und Einheit $^{\mathrm{W}}/_{\mathrm{m \cdot K}}$ hat. Je grösser λ ist, desto besser leitet das Material.

Konvektion

Zwei Typen von Konvektion:

- Natürliche Konvektion;
- Erzwungene Konvektion.

Der Wärmestrom ist:

$$\dot{Q}'' = \alpha \cdot (T_s - T_\infty), \tag{3}$$

wobei:

- α: Wärmeübertraugungskoeffizient, Einheit $\mathrm{W/m^2 \cdot K}$;
- T_s: Oberflächentemperatur;
- T_∞: Fluidtemperatur im Unendlichen.

Strahlung

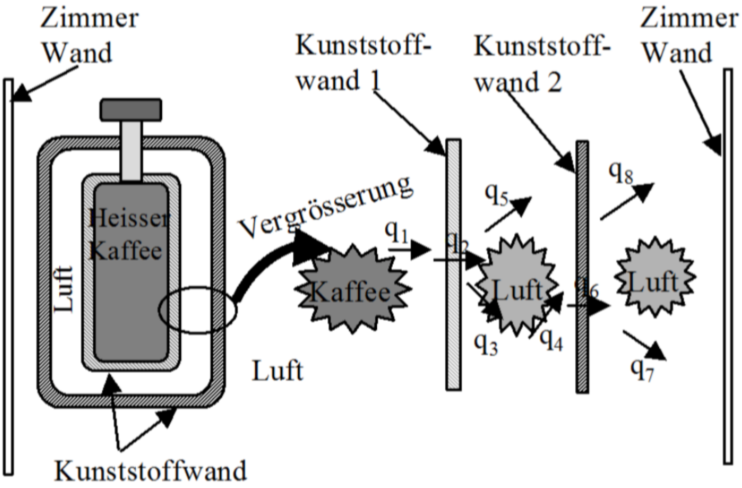
Der Wärmestrom ist:

$$\dot{Q}'' = \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4), \tag{4}$$

wobei $\sigma = 5.678 \cdot 10^{-8}\, {}^{\mathrm{W}}\!/\!_{\mathrm{m^2 \cdot K^4}}$.

Mehr dazu in Thermodynamik III.

Kombination



Wärmeleitungsgleichung

Energieerhaltung auf ein infinitesimales Kontrollvolumen und Fourier'sche Gesetz

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \tag{5}$$

liefern die Wärmeleitungsgleichung

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}, \tag{6}$$

mit $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$.

Wärmeleitungsgleichung

- **Kartesische Koordinaten:**

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$

- **Zylindrische Koordinaten:**

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$

- **Kugelkoordinaten:**

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda \cdot r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda \cdot \sin \phi \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$

Wärmeleitungsgleichung

Vereinfachungen:

- $\lambda =$ konst.:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \Delta T + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}; \tag{7}$$

- Stationär: $\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = 0;$
- 1-Dimensional: $\frac{\partial}{\partial x}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) = 0;$
- Rotationssymmetrisch: $\frac{\partial}{\partial \phi}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) = 0;$
- Unendlich lang: $\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) = 0;$
- Keinen Quellen: $\dot{Q}'''_{\text{Quellen}} = 0.$

Wärmeleitungsgleichung

Das Lösen von der Wärmeleitungsgleichung braucht Anfangsbedingungen/Randbedingungen. Hier vier Beispiele:

- Konstante Oberflächentemperatur:

$$T(x=0) = T_s. \tag{8}$$

- Konstanter Wärmestrom:

$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \dot{Q}_s''. \tag{9}$$

- Adiabate oder isolierte Fläche:

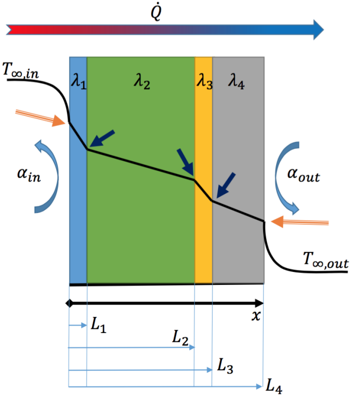
$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0. \tag{10}$$

- Konvektion bei der Oberfläche:

$$-\lambda \cdot \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \pm\alpha \cdot (T(x=0) - T_\infty). \tag{11}$$

Wärmeleitungsgleichung

Wie löst man die Wärmeleitungsgleichung wenn das Profil mehrere Schichte hat?



- PDE für jeden Schicht lösen;
- Zusätzliche Randbedingungen: Bei $x = \{L_1, L_2, L_3\}$ gleiche Temperatur und gleicher Wärmestrom, z.B.

$$T_{\lambda_1}(L_1) = T_{\lambda_2}(L_1),$$
$$-\lambda_1 \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\,T_{\lambda_1}}{\mathrm{d}x}\right|_{L_1} = -\lambda_2 \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\,T_{\lambda_2}}{\mathrm{d}x}\right|_{L_2}.$$

Wärmequelle

Thermische Energie die aus eine anderen Energiequelle umgewandelt wird, z.B. elektrische Folie, die elektrische Energie in Wärme umwandelt.
Für einen Leiter der Länge L mit Querschnittsfläche a und mit spezifischen elektrische Widerstand ρ_e, der durch den Strom I durchgestromt wird, gilt

$$P = \dot{Q} = I^2 \cdot R_e = I^2 \cdot \frac{\rho_e \cdot L}{a}, \tag{12}$$

d.h.

$$\dot{Q}''' = \frac{\dot{Q}}{V} = \frac{I^2 \cdot \frac{\rho_e \cdot L}{a}}{a \cdot L} = \frac{I^2 \cdot \rho_e}{a^2}. \tag{13}$$

Beispiel

Ebene Wand der Länge $2L$ mit vernachlässigbarem Wärmestrom in y Richtung und Wärmequelle $\dot{Q}''' > 0$. Das Problem ist stationär. Die Temperatur bei $x = -L$ und $x = L$ sei T_s. Das Material habe eine konstante Wärmeleitfähigkeit λ.

Wärmeleitungsgleichung

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q}'''_{\text{Quellen}}$$

vereinfacht sich zu

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\dot{Q}'''. \tag{14}$$

Integration liefert:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dot{Q}'''}{\lambda} \cdot x + C_1 \tag{15}$$

Beispiel

Da das Problem um $x = 0$ symmetrisch ist, muss gelten:

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\dot{Q}'''}{\lambda} \cdot 0 + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0. \qquad (16)$$

Zweite Integration liefert:

$$T(x) = -\frac{\dot{Q}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2 + C_2 \qquad (17)$$

Einsetzen der Randbedinung $T(x = \pm L) = T_s$:

$$T_s = -\frac{\dot{Q}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot L^2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{Q}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot L^2. \qquad (18)$$

Beispiel

Der Temperaturprofil ist also

$$T(x) = T_s + \frac{\dot{Q}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot (L^2 - x^2), \tag{19}$$

d.h. ein parabolisches Profil mit Maximum in $x = 0$, d.h. genaum im Zentrum der Wand. Der Wärmestrom ist

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\lambda \cdot \frac{\dot{Q}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot (-2x) = \dot{Q}''' \cdot x. \tag{20}$$

Bemerkung: Alternativ zu der Überlegung mit der Symmetrie kann man die zwei Integrationskonstanten mit den zwei Randbedinungen $T(-L) = T_s$ und $T(L) = T_s$ bestimmen.

Fragen?