



Thermodynamik I - Übung 4

Nicolas Lanzetti

Heutige Themen

- Zusammenfassung letzter Woche;
- Spezifische Wärmekapazitäten;
- Bestimmung der inneren Energie.

Zusammenfassung letzter Woche

- Polytrope Zustandsänderung für ideale Gase:

Isobar	$p = \text{konst.}$	$p \cdot v^0 = \text{konst.}$	$n = 0$
---------------	---------------------	-------------------------------	---------

Isotherm	$T = \text{konst.}$	$R \cdot T = p \cdot v = \text{konst.}$	$n = 1$
-----------------	---------------------	---	---------

Isochor	$v = \text{konst.}$	$\frac{v_1}{v_2} = 1 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}$	$n = \infty$
----------------	---------------------	--	--------------

Adiabat	$\frac{p \cdot V}{T} = \text{konst.}$		
----------------	---------------------------------------	--	--

- Arbeit kann aus diesen Formeln hergeleitet werden ($p(V) = \dots$);
- Erinnerung: Für ideale Gase die innere Energie ist **nur** Funktion der Temperatur: $u = u(T)$.

Spezifische Wärmekapazitäten

Im Allgemeinen gilt (h: Enthalpie, kommt nächste Woche)

$$u = u(v, T), \quad h = h(p, T). \quad (1)$$

Daraus folgt

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) \cdot dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot dT, \quad (2)$$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right) \cdot dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot dT. \quad (3)$$

Erinnerung (Verallgemeinerte Kettenregel):

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) \cdot \frac{dv}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot \frac{dT}{dt} \quad (4)$$

Spezifische Wärmekapazitäten

Mit der Annahme konstantes Volumens ($dv = 0$) bekommt man

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) \cdot dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= c_v \cdot dT, \end{aligned} \tag{5}$$

oder mit der Integralformulierung

$$\Delta u = \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT. \tag{6}$$

Spezifische Wärmekapazitäten

Mit der Annahme konstantes Drucks ($dp = 0$) bekommt man

$$\begin{aligned} dh &= \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right) \cdot dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= c_p \cdot dT, \end{aligned} \tag{7}$$

oder mit der Integralformulierung

$$\Delta h = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT. \tag{8}$$

Spezifische Wärmekapazitäten bei idealen Gasen

Bei idealen Gases haben wird gesehen

$$u = u(T), \quad (9)$$

d.h.

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) \cdot dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= c_v \cdot dT, \end{aligned} \quad (10)$$

oder mit der Integralformulierung

$$\Delta u = \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT, \quad (11)$$

auch **wenn das Volumen nicht konstant ist.**

Spezifische Wärmekapazitäten bei idealen Gasen

Bei idealen Gases haben wird gesehen

$$u = u(T), \quad h(T), \quad (12)$$

d.h.

$$\begin{aligned} dh &= \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right) \cdot dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= c_p \cdot dT, \end{aligned} \quad (13)$$

oder mit der Integralformulierung

$$\Delta h = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT, \quad (14)$$

auch **wenn der Druck nicht konstant ist.**

Bemerkungen zu den Wärmekapazitäten

- c_p und c_v sind Funktion der Temperatur, d.h.

$$c_p = c_p(T), \quad c_v = c_v(T). \quad (15)$$

- c_v und c_p sind auch (für verschiedene Temperaturen) tabelliert.
- Bei perfekten Gase sind c_p und c_v konstant (temperaturunabhängig).
- Falls man nicht mit idealen Gasen arbeitet, muss die Bedingung $v = \text{konst.}$ respektiv $p = \text{konst}$ erfüllt sein!
- Für ideale Gase gilt:

$$c_p = R + c_v, \quad R = \frac{R_0}{M}. \quad (16)$$

Tabellen vs. Wärmekapazitäten

- Grundsätzlich: Falls möglich oder nichts anderes erwähnt wird in der Aufgabenstellung immer mit Tabellen arbeiten.
- Wann arbeitet man mit Wärmekapazitäten?
 - Verlangt in der Aufgabenstellung;
 - c_v oder c_p gegeben;
 - Keine Tabelle für u .
- Wählt man c_p/c_v bei T_1 oder bei T_2 ?
Approximation mit der mittleren Temperatur:

$$\bar{c}_v = c_v \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right). \quad (17)$$

Tabellen - Achtung!

Wie gesagt ist u für einige ideale Gase tabelliert (von Tabelle A-22 bis A-28):

Aufpassen auf die Einheiten: $\left[\frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \right]$

Dann ist

$$\Delta U = \frac{m}{M} \cdot (\bar{u}_2 - \bar{u}_1), \quad (18)$$

mit \bar{u} mol spezifische innere Energie (tabelliert).

Beispiel

Man berechne die Änderung der inneren Energie für 1 kg Sauerstoff bei einer Temperaturerhöhung von $T_1 = 400 \text{ K}$ bis $T_2 = 500 \text{ K}$...

- mit der tabellierten inneren Energie;
- mit der Wärmekapazität.

Sauerstoff (O_2) kann als ideales Gas betrachtet werden.

Beispiel

- Mit Tabellen (A-1 und A-24):

$$\Delta U = m \cdot (u_2 - u_1) = \frac{m}{M} \cdot (\bar{u}(500) - \bar{u}(400)) = 69.69 \text{ kJ} \quad (19)$$

- Mit Wärmekapazitäten:

$$\Delta U = m \cdot \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT \approx m \cdot c_v \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) \cdot \Delta T \quad (20)$$

Mit Tabelle A-20: $c_v(450 \text{ K}) = 0.696 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

$$\Delta U = m \cdot c_v(450 \text{ K}) \cdot \Delta T = 69.60 \text{ kJ} \quad (21)$$

Fehler $\approx 0.1\%$

Beispiel

- Mit Wärmekapazitäten (ohne mittlere Temperatur):

Mit Tabelle A-20: $c_v(400 \text{ K}) = 0.681 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$

$$\Delta U = m \cdot c_v(400 \text{ K}) \cdot \Delta T = 68.10 \text{ kJ} \quad (22)$$

Fehler $\approx 2.2\%$

- Mit Wärmekapazitäten (ohne mittlere Temperatur):

Mit Tabelle A-20: $c_v(500 \text{ K}) = 0.712 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$

$$\Delta U = m \cdot c_v(500 \text{ K}) \cdot \Delta T = 70.12 \text{ kJ} \quad (23)$$

Fehler $\approx 0.6\%$

Fragen?