Regelungstechnik II PVK - Lösungen

Nicolas Lanzetti
lnicolas@student.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung Regelungstechnik I

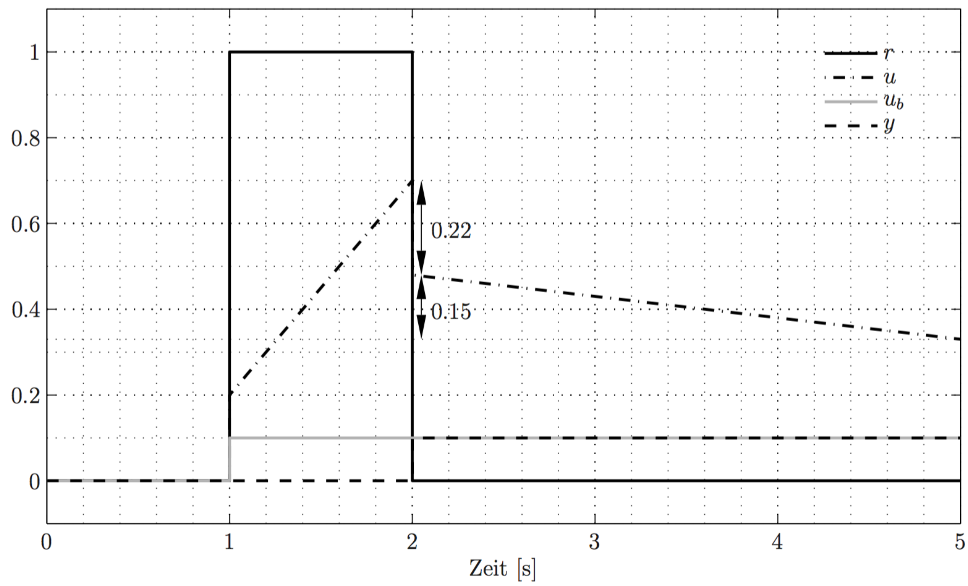
1. Siehe Prüfung RT1 2016-1.

2 SISO Reglersynthese

1. Siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 2.
2. Siehe Prüfung RT2 2011-1, Aufgabe 2.
3. Siehe Serie 3 RT2, Aufgabe 1.
4. Siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 4.

3 Realisierung und Implementierung von Reglern

1. Siehe Prüfung RT2 2011-1, Aufgabe 1.
2. (a) Die Signale sind in folgender Abbildung dargestellt.



Erklärung:

- Intervall $[0, 1]$: Alle Signale sind gleich 0.
- Intervall $[1, 2]$: Da die Strecke eine Totzeit von 1 hat, ist der Output 0. Der Regelfehler ist also $e(t) = 1$. Der Input ist somit

$$u(t) = 0.2 \cdot e(t) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\tau e(t)\,\mathrm{d}\tau = 0.2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \int_1^t 1\,\mathrm{d}\tau = 0.2 + 0.5 \cdot (t-1).$$

Somit ist $u(t = 2^-) = 0.7$. Da $u(t) > 0.1$ ist $u_b(t) = 0.1$.

- Intervall $[2, 3)$: Es gibt einen Sprung in $y(t)$, insbesondere $y(t) = u_b(t-1) = 0.1$. Der Regelfehler ist somit $e(t) = 0 - 0.1 = -0.1$. Der Input ist dann

$$\begin{aligned} u(t) &= 0.2 \cdot e(t) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\tau e(t)\,\mathrm{d}\tau = 0.2 \cdot (-0.1) + \frac{1}{2}\left(\int_1^2 1\,\mathrm{d}\tau + \int_2^t (-0.1)\,\mathrm{d}\tau\right) \\ &= -0.02 + 0.5 + 0.5 \cdot (-0.1) \cdot (t-2) = 0.48 - 0.05 \cdot (t-2). \end{aligned}$$

Somit ist $u(t = 2^+) = 0.48$. Wiederum ist $u_b(t) = 0.1$.

- Intervall $[3,5]$: Die Sättigung bleibt bis $u(t) > 0.1$. Analog zum Intervall $[2,3)$ bekommt man:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= 0.2 \cdot e(t) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\tau e(t)\,\mathrm{d}\tau = 0.2 \cdot (-0.1) + \frac{1}{2}\left(\int_1^2 1\,\mathrm{d}\tau + \int_2^t (-0.1)\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= -0.02 + 0.5 + 0.5 \cdot (-0.1) \cdot (t-2) = 0.48 - 0.05 \cdot (t-2).
\end{aligned}
$$

  Bei $t = 5\,\mathrm{s}$ ist $u(t = 5\,\mathrm{s}) = 0.48 - 0.05 \cdot 3 = 0.48 - 0.15 = 0.33$. Darum bleibt das System gesättigt. Falls das nicht der Fall wäre, muss man die Zeit finden, bei der $|u(t)| < 0.1$ und, mit einer Totzeit von einer Sekunde, $y(t)$ entsprechend anpassen. Das hat einen Einfluss auf $e(t)$ und deshalb auch auf $u(t)$.

(b) Die Stellgrössenbeschränkung kann zu einen Windup des Integrators führen. Dieses Problem kann mit einer Anti-Reset Windup Schaltung behoben werde.

3. Siehe Serie 4 RT2, Aufgabe 2.

4. Siehe Serie 4 RT2, Aufgabe 3.

5. (a)
   - ☐ $x(t) = \cos(4 \cdot \pi \cdot t)$
   - ☐ $x(t) = \cos(4 \cdot \pi \cdot t + \pi)$
   - ☐ $x(t) = 2 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t + \pi)$
   - ☒ $x(t) = \cos(0.2 \cdot \pi \cdot t)$
   - ☒ $x(t) = \cos(0.2 \cdot \pi \cdot t + \pi)$
   - ☒ $x(t) = 2 \cdot \cos(0.2 \cdot \pi \cdot t + \pi)$
   - ☐ $x(t) = \cos(\pi \cdot t)$
   - ☐ $x(t) = \cos(\pi \cdot t + \pi)$
   - ☐ $x(t) = 2 \cdot \cos(\pi \cdot t + \pi)$
   - ☐ $x(t) = \cos(0.2 \cdot \pi \cdot t) + \cos(4 \cdot \pi \cdot t)$
   - ☒ $x(t) = \sin(0.2 \cdot \pi \cdot t) + \sin(0.4 \cdot \pi \cdot t)$
   - ☐ $x(t) = \sum_{i=1}^{100} \cos(2 \cdot \pi/(i+1) \cdot t)$
   - ☒ $x(t) = \sum_{i=1}^{100} \cos(2 \cdot \pi/(i+2) \cdot t)$

   (b) Es muss gelten $f_s > 40\,\mathrm{Hz}$.

6. (a) Für welche Wahl von A und B ist das System asymptotisch stabil?
   - ☐ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   - ☐ $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   - ☒ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   - ☐ $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   - ☐ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   - ☒ $A = \begin{bmatrix} -0.1 & -2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   - ☒ $A = \begin{bmatrix} -0.1 & -2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   - ☒ $A = \begin{bmatrix} 0.1 & -2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

☒ $A = \begin{bmatrix} 0.1 & -2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Die Matrix B spielt keine Rolle für die Stabilität des Systems?

☒ Wahr.

☐ Wahr, aber nur $\|A\|_2 < \sqrt{2}$.

☐ Falsch.

4 MIMO Systeme

1. Siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 7.
2. Siehe Prüfung RT2 2011-1, Aufgabe 7.
3. Siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 1.
4. Siehe Prüfung RT2 2011-1, Aufgabe 3.
5. (a) Richtig, siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 6.
   (b) Falsch, siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 6.
   (c) Falsch, siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 6.
6. Siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 8.
7. Siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 8.

5 Frequenzantworten von MIMO-Systemen

1. Matrix A: $\sigma_1 = 2.4142, \sigma_2 = 0.4142$.
   Matrix B: $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sqrt{2}$.
2. Siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 8.
3. Die Singularwerte der Matrix $P(j)$ sind $\sigma_{\max} = 1.8305$ und $\sigma_{\min} = 0.3863$. Deshalb gilt es für die Verstärkung

$$3.863 = 10 \cdot \sigma_{\min} \leq \|\nu\| \leq 10 \cdot \sigma_{\max} = 18.305.$$

   Da das System linear ist, ändert die Frequenz sich nicht.

   ☒ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 5 \cdot \sin(t + 0.114) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$ ☐ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 19 \cdot \cos(t + 0.114) \\ \cos(t + 1.124) \end{bmatrix}$

   ☐ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 5 \cdot \sin(t + 0.114) \\ \cos(2 \cdot t) \end{bmatrix}$ ☒ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 5 \cdot \cos(t + 0.114) \\ 5 \cdot \cos(t) \end{bmatrix}$

   ☐ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} \sin(t + 0.542) \\ \sin(t + 0.459) \end{bmatrix}$ ☒ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 10 \cdot \sin(t + 2.114) \\ 11 \cdot \sin(t + 1.234) \end{bmatrix}$

4. Aus dem Plot folgt $\sigma_{\min} = 0.01$ und $\sigma_{\max} = 1$. Da das Eingangssignal eine Verstärkung von $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ hat, folgt

$$0.5 \approx 5 \cdot \sigma_{\min} \leq \|\nu\| \leq 10 \cdot \sigma_{\max} \approx 5.$$

☒ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot \sin(30 \cdot t + 0.114) \\ 0.5 \cdot \cos(30 \cdot t) \\ 0.5 \cdot \cos(30 \cdot t + 1) \end{bmatrix}$

☒ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \cdot \cos(30 \cdot t) \\ 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 1) \end{bmatrix}$

☐ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 4 \cdot \sin(30 \cdot t + 0.114) \\ 3 \cdot \cos(30 \cdot t) \\ 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 1.000) \end{bmatrix}$

☒ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 0.243) \\ 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 0.142) \\ 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 0.252) \end{bmatrix}$

☐ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot \sin(30 \cdot t + 0.114) \\ 0.1 \cdot \cos(30 \cdot t) \\ 0.1 \cdot \cos(30 \cdot t + 1.000) \end{bmatrix}$

☐ $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 3 \cdot \cos(30 \cdot t + 0.523) \\ \cos(30 \cdot t) \cdot \sin(30 \cdot t) \\ 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 1) \end{bmatrix}$

6 MIMO Reglersynthese

1. Siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 5.
2. (a) Falsch, siehe Prüfung RT2 2010-1, Aufgabe 6.
   (b) Falsch.
3. Siehe Prüfung RT2 2011-1, Aufgabe 5.
4. (a) $A \in \mathbb{R}^{6\times6}$, $B \in \mathbb{R}^{6\times2}$, $C \in \mathbb{R}^{3\times6}$, $D \in \mathbb{R}^{3\times2}$.
   (b) $P(s) \in \mathbb{C}^{3\times2}$.
   (c) $Q \in \mathbb{R}^{6\times6}$.
   (d) $R \in \mathbb{R}^{2\times2}$.
   (e) $K \in \mathbb{R}^{2\times6}$.
   (f) $L \in \mathbb{R}^{6\times3}$.
5. (a) Die Matrizen K hat Dimension 1×2, d.h. $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$.
   (b) Das geschlossene System wird beschrieben durch

$$\dot{x} = (A - B \cdot K) \cdot x.$$

   Die Eigenwerte von $A - B \cdot K$ müssen also mit den gegebenen Polen übereinstimmen. Daraus folgt:

$$A - B \cdot K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 1 - k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Die Eigenwerte von $A - B \cdot K$ sind dann

$$\frac{(1 - k_1) \pm \sqrt{(1 - k_1)^2 + 4 \cdot (1 - k - 2)}}{2} \stackrel{!}{=} -1.5 \pm 1.$$

   Daraus folgt $k_1 = 4$ und $k_2 = 9/4 = 2.25$. Die Zustandsrückführungsmatrix ist somit

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 2.25 \end{bmatrix}.$$

6. Siehe Serie 10 RT2, Aufgabe 1.
7. Siehe Serie 10 RT2, Aufgabe 2.
8. (a) Der Zustandsvektor ist $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & z(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\
&= A \cdot x(t) + B \cdot (H \cdot z(t) + M \cdot r(t) - M \cdot y(t)) \\
&= A \cdot x(t) + B \cdot (H \cdot z(t) + M \cdot r(t) - M \cdot C \cdot x(t)) \\
&= (A - B \cdot M \cdot C) \cdot x(t) + B \cdot H \cdot z(t) + B \cdot M \cdot r(t) \\
&= \begin{bmatrix} A - B \cdot M \cdot C & B \cdot H \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot M \cdot r(t), \\
\dot{z}(t) &= F \cdot z(t) + G \cdot e(t) \\
&= F \cdot z(t) + G \cdot r(t) - G \cdot y(t) \\
&= F \cdot z(t) - G \cdot C \cdot x(t) + G \cdot r(t) \\
&= \begin{bmatrix} -G \cdot C & F \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + G \cdot r(t).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A - B \cdot M \cdot C & B \cdot H \\ -G \cdot C & F \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \tilde{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} B \cdot M \\ G \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot r(t).$$

(c) Für die gegebene Matrizen ist

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte von $\tilde{A}$ sind $\lambda_i = -1/2 \pm j \cdot \sqrt{23/4}$. Darum ist das System asymptotisch.

(d) Da die Eigenwerte einen imaginären Teil besitzen ist das System schwingungsfähig.