Aufgabe 6 (LQG/LTR) 10 Punkte

Sie haben ein System wie folgt modelliert:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$
$$y(t) = 0.5x(t)$$

Nun möchten Sie gemäss folgenden Schritten einen Regler für das System auslegen:

a) (2 Punkte) Entwerfen eines LQ-Reglers K mit Zustandsrückführung für $r = 1$ (Hinweis: In MATLAB® würden Sie schreiben `K=lqr(A,b,c'*c,r);`).

b) (2 Punkte) Entwerfen eines LTR-Beobachters L für $q = 1/32$ (Hinweis: in MATLAB® würden Sie schreiben `L=lqr(A',c',b*b',q);`).

c) (4 Punkte) Nach einigen Untersuchungen stellen Sie fest, dass das ausgelegte Regelsystem einen stationären Regelfehler aufweist. Entwerfen Sie nun einen neuen LQ-Regler K für $r = 1$, mit ***integral action*** (mit integrierendem Verhalten), dessen Verstärkung $\gamma = 1$ ist. (Hinweis: Erweitern Sie das ursprüngliche System zu einem System zweiter Ordnung $\{\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}\}$ und berechnen Sie anschliessend den neuen Regler. In MATLAB® würden Sie schreiben `K=lqr(A_tilde,b_tilde,c_tilde'*c_tilde,r*eye(2));`).

d) (2 Punkte) Zeichnen Sie ein detailliertes Signalflussbild des gesamten Regelsystems in **b**) und **c**) inklusive Regelstrecke, Beobachter und Regler (verwenden Sie dabei die zur Verfügung stehenden Zahlenwerte!)

Lösung 6

a) (2 Punkte) Die Zustandsrückführmatrix des LQG-Reglers wird bestimmt durch

$$K = r^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi,$$

wobei Φ die positiv-definite Lösung der folgenden Matrix-Riccati-Gleichung ist:

$$\Phi \cdot B \cdot r^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^T \cdot \Phi - C^T \cdot C = 0.$$

Für die System-Matrizen $A = -1,\ B = 1,\ C = 1/2$ erhalten wir:

$$\Phi \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \Phi - \Phi \cdot (-1) - (-1) \cdot \Phi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Phi^2 + 2 \cdot \Phi - \frac{1}{4} = 0,$$

$$(\Phi + 1)^2 - 1 - \frac{1}{4} = 0,$$

$$(\Phi + 1)^2 = \frac{5}{4},$$

$$\Phi = -1 \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{-2 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Die einzige positiv-definite Lösung der Riccati-Gleichung ist $\Phi = \frac{-2+\sqrt{5}}{2} \approx 0.118034$. Daraus erhalten wir die Zustandsrückführung

$$K = 1 \cdot 1 \cdot \frac{-2 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{5}}{2}.$$

b) (2 Punkte) Die Verstärkungsmatrix der des LTR-Beobachters wird bestimt durch

$$L = \left(q^{-1} \cdot C \cdot \Phi\right)^T,$$

wobei Φ die positiv-definite Lösung der folgenden Matrix-Riccati-Gleichung ist:

$$\Phi \cdot C^T \cdot q^{-1} \cdot C \cdot \Phi - \Phi \cdot A^T - A \cdot \Phi - B \cdot B^T = 0.$$

Für die System-Matrizen $A = -1,\ B = 1,\ C = 1/2$ erhalten wir:

$$\Phi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Phi - \Phi \cdot (-1) - (-1) \cdot \Phi - 1 \cdot 1 = 8 \cdot \Phi^2 + 2 \cdot \Phi - 1 = 0,$$

$$\left(\Phi + \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0,$$

$$\left(\Phi + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{9}{64},$$

$$\Phi = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{8}.$$

Die einzige positiv-definite Lösung ist $\Phi = \frac{-1+3}{8} = \frac{1}{4}$. Daraus erhalten wir die Verstärkung des Beobachters

$$L = \left(\frac{32}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = 4.$$

c) (4 Punkte) Die System-Matritzen $\{\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}\}$ des mit einem Integrator (Verstärkung $\gamma = 1$) erweiterten Systems lauten

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für

$$\Phi = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

lautet die Matrix-Riccati-Gleichung

$$\begin{pmatrix} s_1^2 & s_1 s_2 \\ s_1 s_2 & s_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -s_1 - \frac{s_2}{2} & 0 \\ -s_2 - \frac{s_3}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -s_1 + s_2 & -s_2 - \frac{s_3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + 2s_1 + s_2 + s_1^2 & s_2 + \frac{s_3}{2} + s_1 s_2 \\ s_2 + \frac{s_3}{2} + s_1 s_2 & -1 + s_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit der Gleichung an der Position (2,2) erhalten wir direkt s_2

$$-1 + s_2^2 = 0 \Rightarrow s_2 = \pm 1$$

Die Gleichung an der Position (1,1) liefert s_1 mit Hilfe von s_2

$$-\frac{1}{4} + 2s_1 + s_2 + s_1^2 = 0 \Rightarrow (s_1+1)^2 - 1 - \frac{1}{4} + s_2 = 0$$

$$\Rightarrow (s_1+1)^2 = -s_2 + \frac{5}{4} \Rightarrow s_1 = -1 \pm \sqrt{-s_2 + \frac{5}{4}}$$

Da Φ positiv sein muss, muss s_1 positiv sein:

$$s_1 = -1 \pm \sqrt{-s_2 + \frac{5}{4}} \Rightarrow s_2 = -1$$

$$\Rightarrow s_1 = -1 + \sqrt{-(-1) + \frac{5}{4}} = \frac{-2+\sqrt{9}}{2} = \frac{-2+3}{2}$$

Da s_1 positiv sein muss, ist $s_1 = \frac{1}{2}$. Der Wert für s_3 erhalten wir schliesslich durch die Gleichung an der Position (1,2) oder (2,1):

$$s_2 + \frac{s_3}{2} + s_1 s_2 = 0 \Rightarrow s_3 = 2 \cdot (-s_2 - s_1 s_2) = 2 \cdot (1 + \frac{1}{2}) = 3$$

Mit den berechneten Werten lauet die Lösung für die Matrix Φ:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Überprüfung: Φ ist positiv-definit! Die Verstärkungsmatrix K des LQR ist somit:

$$K = R^{-1}\, Bt^T\, \Phi = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

d) (2 Punkte) Das Signalflussbild des LQG/LTR-Regelsystems mit den gerundeten Zahlenwerte ist unten dargestellt.