Übung 9 - LQRI

1 LQRI

1.1 Formulierung

LQRI ist eine Erweiterung eines LQR Problems, das Folgeregelung erlaubt. Zusätzlich ein Integrator in der Strecke vermeidet einen statischen Nachlauffehler.

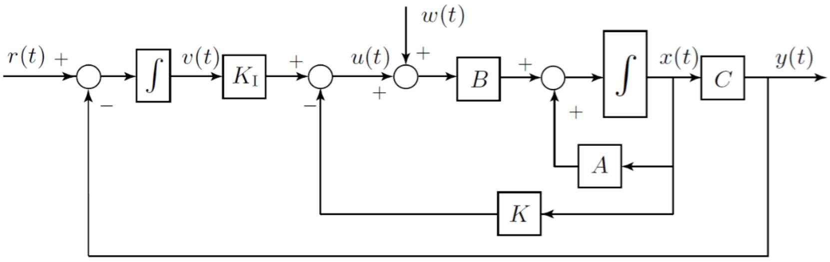

Abbildung 1: Struktur des LQRI.

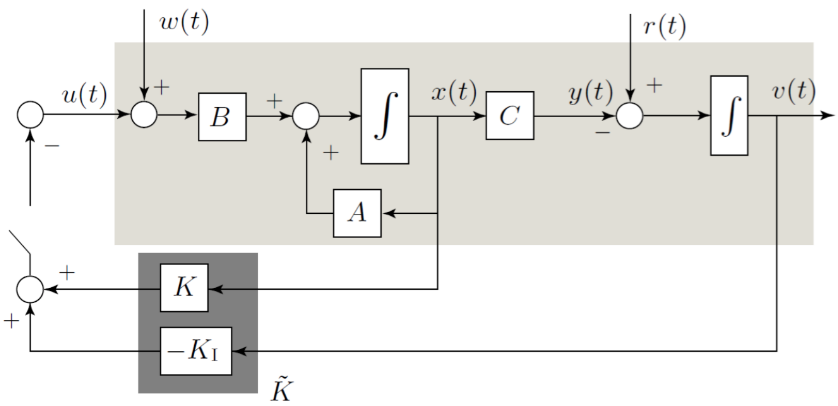

Abbildung 2: Struktur des LQRI.

Anhand Abbildung 2 kann Problem als LQR betrachten. Durch einführen der Zustandsvariable

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p} \tag{1.1}$$

bekommt man folgende Dynamik

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{x}(t) = \tilde{A} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B}_u \cdot u(t) + \tilde{B}_r \cdot r(t), \tag{1.2}$$

wobei

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B}_u = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{I} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Durch Lösen des LQR Problems mit $\tilde{A}$, $\tilde{B}_u$ und den Gewichtungsmatrizen

$$\tilde{Q} = \tilde{C}^T \cdot \tilde{C} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \gamma^2 \cdot \mathbb{I} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{R} = R. \tag{1.4}$$

Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

wobei $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $K_I \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Der Minus in K_I kommt aus der Tatsache, dass in Abbildung 1 $v(t)$ nicht negativ zurückgeführt wird.

Bemerkung. Die Matrix R ändert nicht, da sie ein Gewicht für den Input $u(t)$ ist und der Input unveränderte Dimensionen (im Vergleich zu dem LQR) hat.

1.2 Methode

1. Definiere das neue System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{x}(t) = \tilde{A} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B}_u \cdot u(t) + \tilde{B}_r \cdot r(t), \qquad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

mit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B}_u = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{I} \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

2. Wähle die Gewichtungsmatrizen

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \bar{C} & 0 \\ 0 & \gamma \cdot \mathbb{I} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{Q} = \tilde{C}^\mathsf{T} \cdot \tilde{C} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \gamma^2 \cdot \mathbb{I} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{R} = R. \tag{1.8}$$

Der Regler ist dann

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

3. Finde $\tilde{K}$ durch Lösen ein standard LQR-Problem mit $\{\tilde{A}, \tilde{B}_u, \tilde{Q}, \tilde{R}\}$ statt $\{A, B, Q, R\}$.

Matlab Befehl: `K_tilde=lqr(A_tilde, B_u_tilde,C_tilde'*C_tilde,r*eye(m,m))`.

1.3 Tipps zu der Serie

- Nur die Teilaufgaben a) bis d) sind zu lösen. Den Rest der Aufgaben werden wir nächste Woche behandeln.
- Das Modell wird linearisiert und normiert: Das muss beim Zeichnen des Simulink Modells berücksichtigt werden.