Übung 8 - LQR

1 Der lineare quadratische Regulator (LQR)

1.1 Formulierung

Gegeben sei die Strecke

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m} \tag{1.1}$$

und gesucht ist ein Regler der Form

$$u(t) = f(x(t), t), \tag{1.2}$$

der $x(t)$ asymptotisch zu Null (mit $x(0) \neq 0$) bringt, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{1.3}$$

Beim LQR Problem will man das Kriterium

$$J(x,u) = \int_0^\infty (\underbrace{x^\mathsf{T} \cdot Q \cdot x}_{\text{Fehler}} + \underbrace{u^\mathsf{T} \cdot R \cdot u}_{\text{eingesetze En.}}) \,\mathrm{d}t, \tag{1.4}$$

minimieren, wobei

$$Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad R \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{1.5}$$

zwei symmtrische positiv definite Matrizen sind. Die Lösung[1] $u(t) = f(x(t), t)$ (die (1.4) minimiert) ist gegeben durch

$$u(t) = -K \cdot x(t), \qquad \text{mit} \qquad K = R^{-1} \cdot B^\mathsf{T} \cdot \Phi, \tag{1.6}$$

wobei Φ ist die Lösung der Riccati Gleichung

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\mathsf{T} \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\mathsf{T} \cdot \Phi - Q = 0. \tag{1.7}$$

Bemerkung. Für den SISO Fall ist (1.4)

$$J(x,u) = \int_0^\infty (q \cdot x^2 + r \cdot u^2) \,\mathrm{d}t. \tag{1.8}$$

Bemerkung. Der gefundene Regler K ist optimal, d.h. ist Lösung eines Optimisierungsproblems. Das impliziert jedoch nicht, dass es um den besten Regler geht.

Beispiel. Für das Kriterium

$$J(x,u) = \int_0^\infty \left(x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 10 \cdot x_2^2 + 2 \cdot u_1^2 + 3 \cdot u_2^2\right) \,\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

sind die Matrix R und Q gegeben durch

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

[1] Hier wird es angenommen, dass den Zustandsvektor $x(t)$ verfügbar ist. Das ist im Allgemeinen nicht der Fall, darum muss einen sogennanten Beobachter implementiert werden (mehr in einige Wochen).

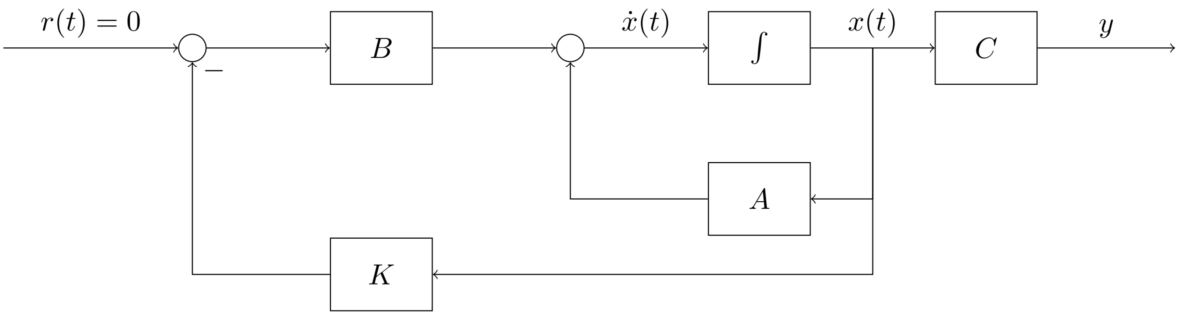

Abbildung 1: LQR Problem: Der geschlossene Regelkreis.

1.2 Methode

1. Wähle die Matrizen R und $Q = \bar{C}^\intercal \cdot \bar{C}$. Eine *mögliche* Wahl ist $R = r \cdot \mathbb{I}_{m\times m}$ und $\bar{C} = C$.
2. Finde die symmetrische positiv definite Lösung Φ der Riccati Gleichung
$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\intercal \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\intercal \cdot \Phi - Q = 0. \tag{1.11}$$
3. Berechne die Matrix K mit
$$K = R^{-1} \cdot B^\intercal \cdot \Phi. \tag{1.12}$$

Matlab Befehl: `K = lqr(A,B,Q,R)`.
Bemerkung. Die Matrix Φ existiert falls:

- $\{A, B\}$ vollständig steuerbar;
- $\{A, \bar{C}\}$ vollständig beobachtbar.

Es ist jedoch möglich, dass Φ existiert, auch wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind ("sufficient but not necessary").

1.3 Frequenzbereich

In Frequenzbereich ergeben sich folgende Ausdrücke für die Kreisverstärkung und die komplementäre Sensitivität (siehe Abbildung 1):
$$L_{\text{LQR}}(s) = K \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B,$$
$$T_{\text{LQR}}(s) = C \cdot (s \cdot I - (A - B \cdot K))^{-1} \cdot B.$$

1.4 Eigenschaften

1. Die Matrix $A - B \cdot K$ ist asymptotisch stabil. Beachte, dass
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = (A - B \cdot K) \cdot x(t). \tag{1.13}$$
Darum ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil.
2. Minimal return difference (mit $R = r \cdot \mathbb{I}$):
$$\mu_{\text{LQR}} = \min_\omega \{\sigma_{\min}(\mathbb{I} + L_{LQR})\} \geq 1. \tag{1.14}$$
3. Closed loop Verhalten:
$$\max_\omega \{\sigma_{\max}(S(j \cdot \omega))\} \leq 1, \tag{1.15}$$
$$\max_\omega \{\sigma_{\max}(T(j \cdot \omega))\} \leq 2. \tag{1.16}$$