Aufgabe 5 (LQ-Regulator) 6 Punkte

Gegeben ist eine Strecke durch

$$\dot{x}_1 = 3x_2$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}u$$

$$y = 4x_1 + \frac{7}{3}x_2.$$

a) (3 Punkte) Lösen Sie das LQ-Regulator Problem für die gegebene Strecke für folgendes Gütekriterium:

$$J = \int_0^\infty 7x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{1}{4}u^2 dt.$$

Gesucht ist die stabilisierende Reglerverstärkungsmatrix K.

b) (2 Punkte) Geben Sie die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises mit obiger Strecke und dem LQ-Regulator K an.

c) (1 Punkt) Wie ändert sich die Bandbreite des Regelsystems qualitativ, wenn für die Auslegung des LQ-Regulators statt dem Gütekriterium J das neue Gütekriterium $\tilde{J}$ verwendet wird?

$$\tilde{J} = \int_0^\infty 70x_1^2 + 30x_2^2 + \frac{10}{4}u^2 dt$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Diese Aufgabe kann ohne explizites Berechnen der Bandbreite gelöst werden.

Lösung 5

a) (3 Punkte) Die stabilisierende Reglerverstärkungsmatrix K für das LQ-Regulatorproblem ist:

$$K = R^{-1}B^T\Phi,$$

wobei $\Phi = \Phi^T = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{pmatrix}$ die Lösung der algebraischen Ricatti-Gleichung

$$\Phi B R^{-1} B^T \Phi - \Phi A - A^T \Phi - Q = 0$$

ist. Die Gewichtungsmatrizen aus dem Gütekriterium J lauten:

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad R = \frac{1}{4}.$$

Ausgeschrieben lautet sie für vorliegendes Problem:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} 4 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \dots$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es resultieren vier Gleichungen:

$$\Phi_2^2 - 6\Phi_2 - 7 = 0 \tag{16}$$
$$\Phi_2\Phi_3 - 3\Phi_1 + 2\Phi_2 - 3\Phi_3 = 0 \tag{17}$$
$$\Phi_2\Phi_3 - 3\Phi_3 - 3\Phi_1 + 2\Phi_2 = 0 \tag{18}$$
$$\Phi_3^2 + 4\Phi_3 - 6\Phi_2 - 3 = 0 \tag{19}$$

Aus (16) folgt $\Phi_2 = 3 \pm 4$. Aus (19) folgt $\Phi_3 = -2 \pm \sqrt{6\Phi_2 + 7}$. Für Φ_2 kommt folglich nur die Lösung $\Phi_2 = 7$ in Frage, das für die zweite Lösung $\Phi_2 = -1$ die Diskriminante von Φ_3 negativ würde. Da die Matrix Φ positiv definit sein muss, gilt $\Phi_3 > 0$. Es folgt:

$$\Phi_2 = 7$$
$$\Phi_3 = 5$$

Aus (17), welche identisch zu (18) ist, ergibt sich

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_2\Phi_3 + 2\Phi_2 - 3\Phi_3}{3} = \frac{34}{3}.$$

Für die Reglerverstärkungsmatrix folgt also

$$K = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{34}{3} & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \end{pmatrix}.$$

b) (2 Punkte) Die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises folgen aus:

$$\det(\lambda I - (A - BK)) = 0$$
$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ 4 & (\lambda + 7) \end{pmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = -4.$$

c) (1 Punkt) Das neue Gütekriterium $\tilde{J}$ führt zu der gleichen Reglerverstärkungsmatrix K wie das ursprüngliche Gütekriterium J, da

$$\tilde{J} = 10 \cdot J.$$

Folglich ändert sich die Bandbreite nicht.