Übung 7 - Frequenzantworten

1 Frequenzantworten von MIMO-Systemen

Wird ein SISO System mit einem harmonischen Signal

$$u(t) = \cos(\omega \cdot t) \cdot h(t) \tag{1.1}$$

angeregt, ist die entsprechende Antwort nach grösser Zeit wiederum durch eine harmonische Funktion gegeben, die die gleiche Frequenz ω aufweist:

$$y_\infty(t) = |P(j \cdot \omega)| \cdot \cos(\omega \cdot t + \angle P(j \cdot \omega)). \tag{1.2}$$

Jetzt wollen wir die Theorie zu MIMO Systemen erweitern. Unter der Annahme $p = m$, d.h. gliech viele Input wie Output, kann man schreiben

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ \vdots \\ \mu_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_m) \end{bmatrix} \cdot h(t) \qquad \text{und} \qquad y_\infty(t) = \begin{bmatrix} \nu_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_1) \\ \vdots \\ \nu_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_m) \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Mit der Laplace Transformation bekommt man

$$U(s) = e^{\Phi \cdot s/\omega} \cdot \mu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad \text{und} \qquad Y(s) = e^{\Psi \cdot s/\omega} \cdot \nu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \tag{1.4}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Phi &= \operatorname{diag}(\phi_1, \dots, \phi_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}, & \mu &= \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_m \end{bmatrix}^\mathsf{T}, \\ \Psi &= \operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}, & \nu &= \begin{bmatrix} \nu_1 & \cdots & \nu_m \end{bmatrix}^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Mit

$$Y(s) = P(s) \cdot U(s) \tag{1.5}$$

folgt

$$e^{j \cdot \Psi} \cdot \nu = P(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \Phi} \cdot \mu. \tag{1.6}$$

Die Norm $\| \cdot \|$ der Matrix $P(j \cdot \omega)$ ist deshalb[1]

$$\|P(j \cdot \omega)\| = \max_{e^{j \cdot \Phi} \cdot \mu \neq 0} \frac{\|e^{j \cdot \Psi} \cdot \nu\|}{\|e^{j \cdot \Phi} \cdot \mu\|} = \max_{\|e^{j \cdot \Phi} \cdot \mu\| = 1} \|e^{j \cdot \Psi} \cdot \nu\|, \tag{1.7}$$

Mit

$$\|e^{j \cdot \Psi} \cdot \nu\| = \|\nu\| \qquad \text{und} \qquad \|e^{j \cdot \Phi} \cdot \mu\| = \|\mu\| \tag{1.8}$$

wird Gleichung (1.7) zu

$$\|P(j \cdot \omega)\| = \max_{\mu \neq 0} \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|} = \max_{\|\mu\| = 1} \|\nu\|, \tag{1.9}$$

Aus der Übung 5 wissen wir, dass

$$\sigma_{\min}(P(j \cdot \omega)) \leq \|\nu\| \leq \sigma_{\max}(P(j \cdot \omega)), \tag{1.10}$$

[1] Die induzierte Norm $\|M\|$ einer Matrix einer linearer Abbildung $y = M \cdot u$ ist

$$\|M\| = \max_{u \neq 0} \frac{\|y\|}{\|u\|} = \max_{\|u\| = 1} \|y\|.$$

das für den Fall $\|u\| \neq 1$ wird

$$\sigma_{\min}(P(j \cdot \omega)) \leq \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|} \leq \sigma_{\max}(P(j \cdot \omega)), \tag{1.11}$$

wobei σ_i die Singularwerte der Matrix $P(j \cdot \omega)$ sind (oder Eigenwerte von $P^* \cdot P$).
Es ist wichtig zu erkennen, dass Gleichugen (1.10) und (1.11) nur "worst case" sind, d.h. man hat keine allgemeine Gleichung $\nu = f(\mu)$. Zusätzlich kann man über den Phasenverlauf keine einfachen und kohärte Aussage gemacht werden.

1.1 Maximale und minimale Verstärkung

Gegeben die Singularwertzerlegung $P(j \cdot \omega) = U \cdot \Sigma \cdot V^*$ bei einer bestimmen Frequenz ω wird die maximale/minimale Verstärkung durch Anregung in Richtung Spaltenvektoren von U. Die Antwort des Systems wird dann in Richtung V sein.

Beispiel. Betrachte ein System mit $m = 2$ Input und $p = 3$ Output. Gegeben ist die Singularwertzerlegung. Gegeben ist die Singularwertzerlegung bie $\omega = 5$ rad/s:

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix} 0.4167 & 0 \\ 0 & 0.2631 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
V &= \begin{bmatrix} 0.2908 & 0.9568 \\ 0.9443 - 0.1542 \cdot j & -0.2870 + 0.0469 \cdot j \end{bmatrix}, \\
U &= \begin{bmatrix} -0.0496 - 0.1680 \cdot j & 0.1767 - 0.6831 \cdot j & -0.6621 - 0.1820 \cdot j \\ 0.0146 - 0.9159 \cdot j & -0.1059 + 0.3510 \cdot j & -0.1624 + 0.0122 \cdot j \\ 0.0349 - 0.3593 \cdot j & 0.1360 - 0.5910 \cdot j & 0.6782 + 0.2048 \cdot j \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Für den Singularwert $\sigma_{\max} = 0.4167$ sind die "Eigenvektoren" $V(:, 1)$ und $U(:, 1)$:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.2908 \\ 0.9443 - 0.1542 \cdot j \end{bmatrix}, \qquad |V_1| = \begin{bmatrix} 0.2908 \\ 0.9568 \end{bmatrix}, \qquad \angle(V_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1618 \end{bmatrix}, \tag{1.13}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -0.0496 - 0.1680 \cdot j \\ 0.0146 - 0.9159 \cdot j \\ 0.0349 - 0.3593 \cdot j \end{bmatrix}, \qquad |U_1| = \begin{bmatrix} 0.1752 \\ 0.9160 \\ 0.3609 \end{bmatrix}, \qquad \angle(U_1) = \begin{bmatrix} -1.8581 \\ -1.5548 \\ -1.4741 \end{bmatrix}. \tag{1.14}$$

Die maximale Verstärkung erreicht man also mit

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.2908 \cdot \cos(5 \cdot t) \\ 0.9568 \cdot \cos(5 \cdot t - 0.1618) \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

Die entsprechende Antwort des Systems ist also

$$y(t) = \sigma_{\max} \cdot \begin{bmatrix} 0.1752 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.8581) \\ 0.9160 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.5548) \\ 0.3609 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.4741) \end{bmatrix} = 0.4167 \cdot \begin{bmatrix} 0.1752 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.8581) \\ 0.9160 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.5548) \\ 0.3609 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.4741) \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

Da die drei Signale $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ nicht in Phase sind, wird die maximale Verstärkung nie erreicht. Man kann zeigen, dass

$$\max_t \|y(t)\| \approx 0.4160 < 0.4167 = \sigma_{\max}. \tag{1.17}$$

Der Grund dieser Abweichung steht in der Phasenverschiebung zwischen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$. Die gleiche Analyse kann man auch für den kleinsten Singularwert $\sigma_{\min}$ machen.

1.2 Robustheit und Störungsunterdrückung

Definiere die Matrix Norm $\|\cdot\|_\infty$ als

$$\|G(s)\|_\infty = \max_\omega(\max_i(\sigma_i(G(i\cdot\omega))). \tag{1.18}$$

	SISO	MIMO
Robustheit	$\mu = \min\limits_\omega \left(\lvert 1 + L(j\cdot\omega)\rvert\right)$	$\mu = \min\limits_\omega \left(\sigma_{\min}(\mathbb{I} + L(j\cdot\omega))\right)$
Rauschenverstärkung	$\lvert\lvert S\rvert\rvert_\infty = \max\limits_\omega \left(\lvert S(j\cdot\omega)\rvert\right)$	$\|S\|_\infty = \max\limits_\omega \left(\sigma_{\max}(S(j\cdot\omega))\right)$

1.3 Tipps für die Serie - Aufgabe 2

Einige hilfreiche Matlab-Befehle:

- Betrag eines Vektors `x`: `sqrt(sum(x.^ 2));`
- `y`: `i`-te Spalte einer Matrix `A`: `y=A(:,i);`
- `y`: `i`-te Zeile einer Matrix `A`: `y=A(i,:);`