Aufgabe 3 (Diagonal Dominante Systeme) 10 Punkte

Shafai (Guzzella)

An Ihrem ersten Arbeitstag in der Firma SCS Inc. (Super Control Systems, Incorporated) erhalten Sie die Aufgabe zu beurteilen, ob für ein MIMO-System mit der Übertragungsmatrix

$$P(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \alpha \\ \dfrac{s+2}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \end{bmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

ein "echter" MIMO-Entwurf notwendig ist oder die Regelungsaufgabe auch zufriedenstellend mit zwei voneinander unabhängigen SISO-Regelkreisen ("one-loop-at-the-time") gelöst werden kann.

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die frequenzabhängige Matrix der Relative-Gain Array $RGA(s)$ in Funktion von α. Nutzen Sie dabei die Eigenschaften der RGA-Matrix, damit Sie $RGA(s)$ mögllichst effizient bestimmen können!

b) (1 Punkt) Für welchen Wert von α können Sie die Regelungsaufgabe für alle Frequenzen $\omega \in [0, \infty)$ mit dem Ansatz "one-loop-at-the-time" lösen?

Nun erhalten Sie die Zusatzinformation, dass $\alpha = 1$ ist.

c) (4 Punkte) Verwenden Sie die Beträge der Elemente der RGA-Matrix, um zu **beurteilen**, ob das Regelsystem für das Frequenzband von $\omega \in [0, 0.1]$ rad/s mit dem "one-loop-at-the-time" Ansatz entworfen werden kann.

d) (2 Punkte) Verwenden Sie ebenfalls die Beträge der Elemente der RGA-Matrix, um zu **zeigen**, dass das Regelsystem für den Frequenzbereich $\omega \in [10, \infty)$ rad/s mit dem "one-loop-at-the-time" Ansatz entworfen werden kann. Geben Sie an, welche Paarung der Ein- und Ausgangsgrössen für die Regelung ausgewählt werden muss.

Lösung 3

a) (3 Punkte) Das $RGA(s)$ ist durch eine 2×2-Matrix mit den folgenden Elementen gegeben, die in Abhängigkeit von s und α berechnet sind.

$$[RGA(s)]_{11} = [RGA(s)]_{22} = \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} = \frac{-\frac{1}{s(s+1)}}{-\frac{1}{s(s+1)} - \frac{\alpha(s+2)}{s+1}}$$
$$= \frac{1}{1+\alpha s(s+2)} = \frac{1}{\alpha s^2 + 2\alpha s + 1}$$

$$[RGA(s)]_{12} = [RGA(s)]_{21} = 1 - [RGA(s)]_{11} = 1 - \frac{1}{1+\alpha s(s+2)}$$
$$= \frac{\alpha s(s+2)}{1+\alpha s(s+2)} = \frac{\alpha s(s+2)}{\alpha s^2 + 2\alpha s + 1}$$

b) (1 Punkt) Für $\alpha = 0$ ist $RGA(s) = I$ und somit ist das System $P(s)$ (unabhängig von Frequenz s) diagonal-dominant. Deshalb kann die Regelungsaufgabe für alle Frequenzen $\omega \in [0, \infty)$ mit dem "one-loop-at-the-time" Ansatz gelöst werden.

c) (4 Punkte) Für $\alpha = 1$ erhalten wir für die RGA-Matrix

$$[RGA(s)]_{11} = [RGA(s)]_{22} = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$
$$[RGA(s)]_{12} = [RGA(s)]_{21} = \frac{s(s+2)}{s^2+2s+1} = \frac{s(s+2)}{(s+1)^2}.$$

Die Beträge der Emente der RGA-Matrix in Funktion von Kreisfrequenz ω erhalten wir wie folgt:

$$|[RGA(j\omega)]_{11}| = |[RGA(j\omega)]_{22}| = \frac{1}{|j\omega+1|^2} = \frac{1}{1+\omega^2}$$
$$|[RGA(j\omega)]_{12}| = |[RGA(j\omega)]_{21}| = \frac{|j\omega||j\omega+2|}{|j\omega+1|^2} = \frac{\omega\sqrt{4+\omega^2}}{1+\omega^2}.$$

Für den Frequenzbereich $\omega \in [0, 0.1]$ rad/s kann in den obigen Ausdrucken $\omega^2 \leq 0.01$ im Vergleich zu 1 und 4 vernachläsigt werden. Daraus resultiert:

$$|[RGA(j\omega)]_{11}| = |[RGA(j\omega)]_{22}| \approx 1$$
$$|[RGA(j\omega)]_{12}| = |[RGA(j\omega)]_{21}| \leq 0.2.$$

Da die Diagonalemente ungefähr 1 sind und die Ausserdiagonale viel kleiner als 1 sind, kann angenommen werden, dass das System diagonal-dominant ist. Deshalb kann empfohlen werden, das Regelsystem mit dem "one-loop-at-the-time" Ansatz zu entwerfen.

d) (2 Punkte) Für den Frequenzbereich $\omega \in [10, \infty)$ rad/s können die Zahlen 1 und 4 gegenüber $\omega^2 \geq 100$ vernachlässigt werden. Daraus resultiert für die Diagonalelemente ungefähr 0 und für die Ausserdiagonale ungefähr 1. Deshalb ist das System $P(s)$ auch in diesem Fall diagonaldominant und das Regelsystem kann mit dem "one-loop-at-the-time" Ansatz entworfen werden.

Da die Diagonalelemente ungefähr 1 und die Ausserdiagonale ungefähr 0 sind, muss allerdings die folgende Paarung der Ein- und Ausgangsgrössen für die "one-loop-at-the-time" Behandlung gewählt werden: u_1 für y_2 und u_2 für y_1.