Aufgabe 7 (Systemanalyse) 8 Punkte

Alberding (Shafai)

Gegeben sei das System

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

mit der zugehörigen Übertragungsmatrix

$$P(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-2}{s^2-6s+9} & 0 \\ \dfrac{-1}{s^2-6s+9} & \dfrac{1}{s-2} \end{bmatrix}.$$

a) (1 Punkt) Ist das System im Sinne von Lyapunov stabil, asymptotisch stabil oder instabil?

b) (2 Punkte) Ist das System vollständig steuerbar? Ist das System vollständig beobachtbar?

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen des Systems und deren Vielfachheit.

d) (2 Punkte) Tritt eine Pol-Nullstellenkürzung auf? Welche der vorigen Teilaufgaben müssen Sie gelöst haben, um diese Frage in jedem Fall ohne weitere Rechnung beantworten zu können?

e) (1 Punkt) Das Zustandsraummodell sei in Matlab durch `A`, `B`, `C` und `D` definiert. Schreiben Sie einen Matlab-Code, der die Übertragungsmatrix bestimmt.

Lösung 7

a) Aus der Blockdiagonalform von A lässt sich ohne weitere Rechnung erkennen, dass ein Eigenwert

$$\lambda_1 = 2$$

in der rechten Halbebene liegt und das System somit instabil ist.

Die anderen beiden Eigenwerte lauten

$$\lambda_{2,3} = 3.$$

b) Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

besitzt vollen Rang, das System ist vollständig steuerbar.

Die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 15 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

besitzt vollen Rang, das System ist vollständig beobachtbar.

Da bereits die ersten drei Spalten von $\mathcal{R}$ und die drei ersten Zeilen von $\mathcal{O}$ linear unabhängig sind, kann auf die Berechnung von $A^2 \cdot B$ und $C \cdot A^2$ verzichtet werden.

c) Die Pole sind die Wurzeln des kleinsten gemeinsamen Nenners aller Minoren der Übertragungsmatrix.

Minoren 1. Ordnung sind:

$$\frac{s-2}{s^2-6s+9}, \quad \frac{-1}{s^2-6s+9}, \quad \frac{1}{s-2},$$

Minor 2. Ordnung ist:

$$\frac{1}{s^2-6s+9}.$$

Das Pol-Polynom ergibt sich zu $(s-2)(s^2-6s+9)$, woraus die Pole des Systems und deren Vielfachheit folgen:

$$\pi_1 = 2, \quad \pi_{2,3} = 3.$$

Das System ist vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar, somit entsprechen die Pole den Eigenwerten.

Die Nullstellen sind die Wurzeln des grössten gemeinsamen Teilers der Zähler der Minoren höchster Ordnung, nachdem diese auf das Pol-Polynom als gemeinsamen Nenner normiert wurden.

Es gibt nur einen Minor 2. Ordnung $\frac{1}{s^2-6s+9}$, nach Normierung des Nenners auf das Pol-Polynom $(s-2)(s^2-6s+9)$ lautet der Zähler $s-2$. Somit hat das System eine Nullstelle bei

$$\zeta_1 = 2.$$

d) Nein. Zwar liegen sowohl ein Pol $\pi_1 = 2$ als auch eine Nullstelle $\zeta_1 = 2$ bei der gleichen Frequenz, für eine Kürzung muss bei einem MIMO-System jedoch auch die Richtung übereinstimmen.

Um die Frage in jedem Fall ohne weitere Rechnung beantworten zu können, kann b) verwendet werden. Ist das System vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar, ist das System eine Minimalrealisierung und es tritt keine Pol-Nullstellenkürzung auf. Ist das System nicht vollständig steuerbar und/oder nicht vollständig beobachtbar, tritt eine Pol-Nullstellenkürzung auf.

Alternativ kann auch c) zur Lösung führen. Allerdings nur, indem man die Anzahl der gefundenen Pole mit der Anzahl der Zustände vergleicht. Gibt es weniger Pole als Zustände, findet eine Pol-Nullstellenkürzung statt. Gibt es gleich viele Pole und Zustände, findet keine Pol-Nullstellenkürzung statt.

e) `P = tf(ss(A,B,C,D))`

Alternativ:

```
s = tf('s');
P = C*inv(s*eye(3)-A)*B+D
```