Übung 2 - Prädiktive Regelung & Robustheit

1 Prädiktive Regelung

1.1 Struktur

Systeme, die grösse Totzeiten aufweisen, sind mit PID Regler schwierig zu reglen. Das Ziel von prädiktiven Reglern ist die Totzeit zu kompensieren. Die allgemeine Struktur ist in Abbildung 1 und in Abbildung 2 dargestellt[1].

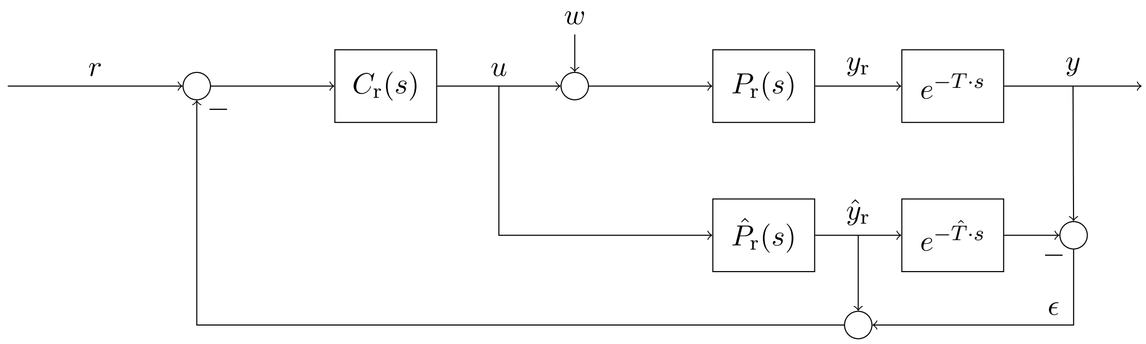

Abbildung 1: Struktur des Smith Prädiktors.

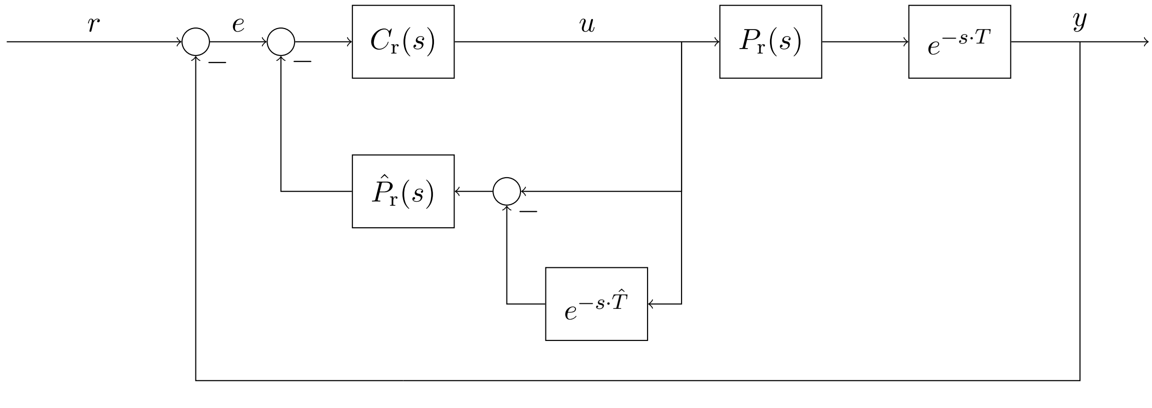

Abbildung 2: Struktur des Smith Prädiktors.

Das Anwenden von prädktiven Regelkreisen ist für Regelstrecke mit

$$\frac{T}{\tau + T} > 0.3, \tag{1.1}$$

wobei T die Totzeit und τ die Zeitkonstante des Systems bezeichnen.

1.2 Analyse

Die Strecke $P(s)$ ist die Übetragungsfuknkion von u nach y, d.h.

$$P(s) = P_\mathrm{r}(s) \cdot e^{-s\cdot T}. \tag{1.2}$$

[1] Es ist wichtig zu erkennen, dass die zwei Abbildungen den gleichen Regelkreis zeigen.

Der Regler $C(s)$ einer Regelstrecke ist die Übertragungsfunktion von e nach u. Hier gilt es:

$$u = C_\mathrm{r}(s) \cdot (e - \hat{P}_\mathrm{r}(s) \cdot (1 - e^{-s\cdot\hat{T}}) \cdot u). \tag{1.3}$$

Auflösen nach u liefert

$$u = \frac{C_\mathrm{r}(s)}{1 + C_\mathrm{r}(s) \cdot \hat{P}_\mathrm{r}(s) \cdot (1 - e^{-s\cdot\hat{T}})} \cdot e, \tag{1.4}$$

d.h. die Übertragungsfunktion des Reglers ist

$$C(s) = \frac{C_\mathrm{r}(s)}{1 + C_\mathrm{r}(s) \cdot \hat{P}_\mathrm{r}(s) \cdot (1 - e^{-s\cdot\hat{T}})}. \tag{1.5}$$

Die Kreisverstärkung ist also

$$L(s) = P(s) \cdot C(s) = \frac{C_\mathrm{r}(s) \cdot P_\mathrm{r}(s) \cdot e^{-s\cdot T}}{1 + C_\mathrm{r}(s) \cdot \hat{P}_\mathrm{r}(s) \cdot (1 - e^{-s\cdot\hat{T}})}. \tag{1.6}$$

Bemerkung. Eine genaue Schätzung des Modells ist unbedingt notwendig. Im nominalen Fall gilt es:

$$\hat{P}_\mathrm{r}(s) = P_\mathrm{r}(s), \qquad \hat{T} = T, \tag{1.7}$$

wobei $P_\mathrm{r}(s)$ die reale Übertragungsfunktion und $\hat{T}$ die reale Totzeit der Strecke sind. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{L(s)}{1 + L(s)} \\ &= \frac{\frac{C_\mathrm{r}(s)\cdot P_\mathrm{r}(s)\cdot e^{-s\cdot T}}{1+C_\mathrm{r}(s)\cdot P_\mathrm{r}(s)\cdot(1-e^{-s\cdot T})}}{1 + \frac{C_\mathrm{r}(s)\cdot P_\mathrm{r}(s)\cdot e^{-s\cdot T}}{1+C_\mathrm{r}(s)\cdot P_\mathrm{r}(s)\cdot(1-e^{-s\cdot T})}} \\ &= \frac{C_\mathrm{r}(s) \cdot P_\mathrm{r}(s) \cdot e^{-s\cdot T}}{1 + C_\mathrm{r}(s) \cdot P_\mathrm{r}(s) \cdot (1 - e^{-s\cdot T}) + C_\mathrm{r}(s) \cdot P_\mathrm{r}(s) \cdot e^{-s\cdot T}} \\ &= \frac{C_\mathrm{r}(s) \cdot P_\mathrm{r}(s)}{1 + C_\mathrm{r}(s) \cdot P_\mathrm{r}(s)} \cdot e^{-s\cdot T} \\ &= T_\mathrm{ref}(s) \cdot e^{-s\cdot T}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

d.h. die Strecke $P(s)$ und die komplementäre Sensitivität $T(s)$ die gleiche Totzeit aufweisen.

2 Robustheit

2.1 Robuste Stabilität

Mit dem Nyquist-Theorem haben wir gesehen, wie man die Stabilität des geschlossenen Regelkreises beurteilen kann. In der Praxis muss man aber noch berücksichtigen, dass das Modell $L(s)$ nicht perfekt ist. Also muss zusätzlich gelten:

$$|W_2(j \cdot \omega) \cdot L(j \cdot \omega)| < |1 + L(j \cdot \omega)| \quad \forall\, \omega \in [0, \infty], \tag{2.1}$$

oder

$$|W_2(j \cdot \omega) \cdot T(j \cdot \omega)| < 1. \tag{2.2}$$

Anders gesagt, muss man garantieren, dass die reale Kreisverstärkung gleichviele Umdrehungen um den Punkt -1 wie unseres Modell $L(s)$ macht.

2.2 Nominelle Regelgüte

$W_1(s)$ ist eine Schranke für die Sensitivität $S(s)$:

$$|W_1(j \cdot \omega) \cdot S(j \cdot \omega)| < 1, \tag{2.3}$$

Diese Ungleichung kann auch als

$$|S(j \cdot \omega)| < |W_1^{-1}(j \cdot \omega)| \tag{2.4}$$

oder als

$$|1 + L(j \cdot \omega)| > |W_1(j \cdot \omega)| \tag{2.5}$$

geschrieben werden.

2.3 Robuste Regelgüte

Die Bedingung der robusten Regelgüte ist erfüllt, falls es

$$|W_1(j \cdot \omega) \cdot S(j \cdot \omega)| + |W_2(j \cdot \omega) \cdot T(j \cdot \omega)| < 1 \tag{2.6}$$

gilt, wobei:

- $W_1(s)$: Schranke für die Sensivität.
- $W_2(s)$: Schranke für die komplementaren Sensitivität oder Unsicherheit.

Gleichung (2.6) kann auch als

$$|W_1(j \cdot \omega)| + |W_2(j \cdot \omega) \cdot L(j \cdot \omega)| < |1 + L(j \cdot \omega)| \tag{2.7}$$

geschrieben werden.

Bemerkung. Die Funktionen $W_1(s)$ und $W_2(s)$ können aus den Spezifikationen des Systems bestimmt werden (z.B. kleine Sensitivität bei kleinen Frequenzen, um Störungen zu unterdrücken).

Bemerkung. Nominelle und robuste Regelgüte beurteilen nicht die Stabilität des Systems: Diese muss mit dem Nyquist Theorem überprüft werden.

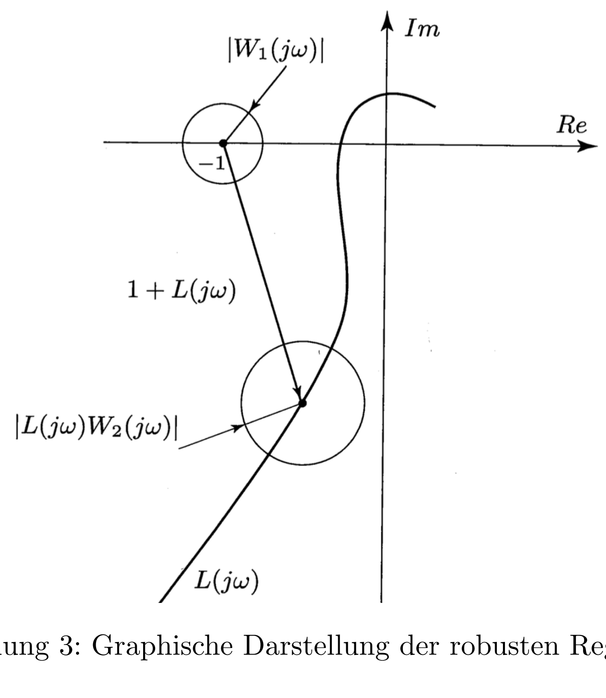

Abbildung 3: Graphische Darstellung der robusten Regelgüte.