Aufgabe 3 (Smith Prädiktor) **10 Punkte**

Für die Regelung eines mit einer Totzeit behafteten Systems bieten sich prädiktive Methoden an. In Abbildung 2 ist das Simulink-Modell eines solchen Regelsystems dargestellt. Das abgebildete Regelsystem besteht aus einem prädiktiven Regler mit der Übertragungsfunktion $C(s)$ und einer totzeitbehafteten Strecke mit der Übertragungsfunktion $P(s)$.

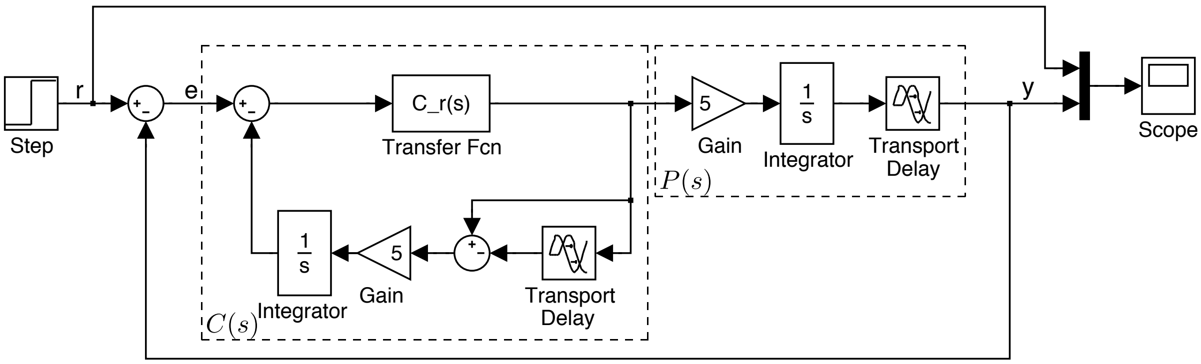

Abbildung 2: Simulink-Modell des Regelsystems

Dieses Regelsystem wurde in Simulink simuliert. Der zugehörige Plot des Scope-Blocks ist in Abbildung 3 dargestellt.

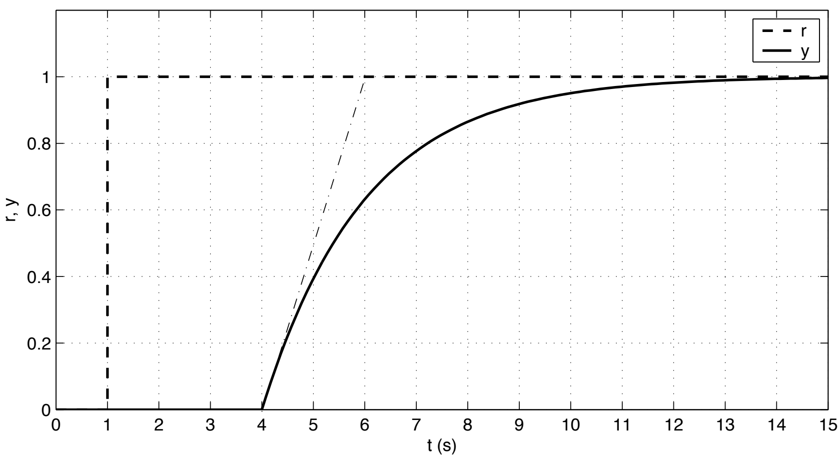

Abbildung 3: Plot des Scope-Blocks

a) Bestimmen Sie anhand der Daten aus Abbildung 3 die komplementäre Sensitivität $T(s)$ des Regelsystems (numerische Werte).

b) Leiten Sie aus der Übertragungsfunktion der komplementären Sensitivität $T(s)$ und der Übertragungsfunktion der Strecke $P(s)$ die Übertragungsfunktion $C(s)$ des Reglers her (numerische Werte).

c) Bestimmen Sie den Eintrag $C_r(s)$ des Transfer Fcn Blocks aus Abbildung 2 (numerische Werte).

Lösung 3

a) Der Anstieg der Systemantwort $y(t)$ bei $t = 4\,\mathrm{s}$ erfolgt entsprechend der Dynamik eines PT1-Elements. Aus den Daten der Abbildung 3 lässt sich die statische Verstärkung zu $k = 1$ und die Zeitkonstante des PT1-Elements zu $\tau = 2\,\mathrm{s}$ bestimmen. Weiter ist ersichtlich, dass die Sprungantwort $y(t)$ gegenüber dem Einganssprung $r(t)$ eine Totzeit-Verschiebung von $T = 3\,\mathrm{s}$ aufweist. Die Übertragungsfunktion der komplementären Sensitivität lautet demnach:

$$T(s) = \frac{k}{\tau\, s + 1}\, e^{-T\, s} = \frac{1}{2\, s + 1}\, e^{-3\, s}. \tag{27}$$

b) Der allgemeine Ausdruck für die komplementäre Sensitivität,

$$T(s) = \frac{P(s)\, C(s)}{1 + P(s)\, C(s)} \tag{28}$$

lässt sich nach der Übertragungsfunktion $C(s)$ des Reglers auflösen.

$$T(s) + T(s)\, P(s)\, C(s) - P(s)\, C(s) = 0 \tag{29}$$

$$T(s) = [1 - T(s)]\, P(s)\, C(s) \tag{30}$$

$$\Rightarrow\ C(s) = \frac{T(s)}{P(s)\, [1 - T(s)]} \tag{31}$$

Die Übertragungsfunktion $P(s)$ der Strecke lässt sich aus dem Simulink-Modell der Abbildung 2 und der Sprungantwort der Abbildung 3 bestimmen. $P(s)$ besteht demnach aus der Übertragungsfunktion $5 \cdot \frac{1}{s}$ in Serie mit einer Totzeit. Da in diesem System die Totzeit der Strecke gleich der Totzeit des Regelsystems ist, resultiert:

$$P(s) = \frac{5}{s}\, e^{-3\, s}. \tag{32}$$

Setzt man nun in (31) die Ausdrücke (27) und (32) ein, so erhält man

$$C(s) = \frac{\dfrac{1}{2\, s + 1}\, e^{-3\, s}}{\dfrac{5}{s}\, e^{-3\, s} \left(1 - \dfrac{1}{2\, s + 1}\, e^{-3\, s}\right)} = \frac{s}{5\, (2\, s + 1 - e^{-3\, s})}. \tag{33}$$

c) Aus dem Simulink-Modell der Abbildung 2 lässt sich die Übertragungsfunktion $C(s)$ des Reglers in Funktion seiner Subsysteme herleiten.

$$u = C_r(s)\, \tilde{e} \tag{34}$$

$$\tilde{e} = e - \frac{5}{s} \left(1 - e^{-3\, s}\right) u \tag{35}$$

$$\Rightarrow\quad u = C_r(s)\, e - C_r(s) \frac{5}{s} \left(1 - e^{-3\, s}\right) u \tag{36}$$

$$\Rightarrow\quad u \left[1 + C_r(s)\, \frac{5}{s} \left(1 - e^{-3\, s}\right)\right] = C_r(s)\, e \tag{37}$$

$$\Rightarrow\quad C(s) = \frac{u}{e} = \frac{C_r(s)}{1 + C_r(s)\, \dfrac{5}{s}\, (1 - e^{-3\, s})} \tag{38}$$

Setzt man (38) mit (33) gleich, so erhält man nach einigen Umformungen die Übertragungsfunktion $C_r(s)$.

$$\frac{C_r(s)}{1 + C_r(s)\,\frac{5}{s}\,(1 - e^{-3\,s})} = \frac{s}{5\,(2\,s + 1 - e^{-3\,s})} \tag{39}$$

$$5\,C_r(s)\left[2\,s + 1 - e^{-3\,s}\right] = s + 5\,C_r(s)\left[1 - e^{-3\,s}\right] \tag{40}$$

$$10\,s\,C_r(s) = s \tag{41}$$

$$\Rightarrow\; C_r(s) = \frac{1}{10} = 0.1. \tag{42}$$

Bemerkungen

Punkteverteilung: a) 2.5, b) 3.5, c) 4.