Übung 1 - Recap und Loop Shaping

1 Wiederholdung Regelungstechnik I

1.1 Modellierung und Übertragungsfunktion

Die Modellierung, Normierung und Linearisierung[1] einer Reglerstrecke liefern eine Zustandsraumdarstellung der Form

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot x(t) + d \cdot u(t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Die Übertragungsfunktion kann dann wie folgt berechnet werden:

$$P(s) = c \cdot (s \cdot \mathbb{I} - A)^{-1} \cdot b + d. \tag{1.2}$$

Im Allgemeinen lässt sich die Übertragungsfunktion eines Systems als rationale Funktion der Form

$$P(s) = b_m \cdot \frac{(s - \xi_1) \cdot \ldots \cdot (s - \xi_m)}{(s - \pi_1) \cdot \ldots \cdot (s - \pi_n)} \tag{1.3}$$

schreiben, wobei π_i die Pole und ζ_i die Nullstellen des Systems bezeichnen. Diese spielen eine entscheidende Rolle für das Verhalten des Systems.

1.2 Analyse linearer Systeme

1.2.1 Lyapunov Stabilität

Die Stäbilität eines Systems lässt sich anhand der Eigenwerte der Matrix A bestimmen:

- Asymptotisch stabil: $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \, \forall \, i$;
- (Grenz)stabil: $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0 \, \forall \, i$, aber nicht asymptotisch stabil;
- Instabil: $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ für mindestens eine i.

1.2.2 Steuerbarkeit

Ein System heisst steuerbar, falls mit einem belibigen Input u ein belieber Zustand x erreicht werden kann. Anders gesagt, kann das System auf alle Zustände gebracht werden.
Ein System ist vollständig steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} b & A \cdot b & \ldots & A^{n-1} \cdot b \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

vollen Rang hat.

1.2.3 Beobachtbarkeit

Ein System heisst beobachtbar, falls man aufgrund des Outputsignals eindeutig auf den Anfangszustand schliessen kann.
Ein System ist vollständig beobachtbar, falls die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

[1] Siehe Skript Regelungstechnik I.

vollen Rang hat.

1.3 Analyse von Feedback-Systemen

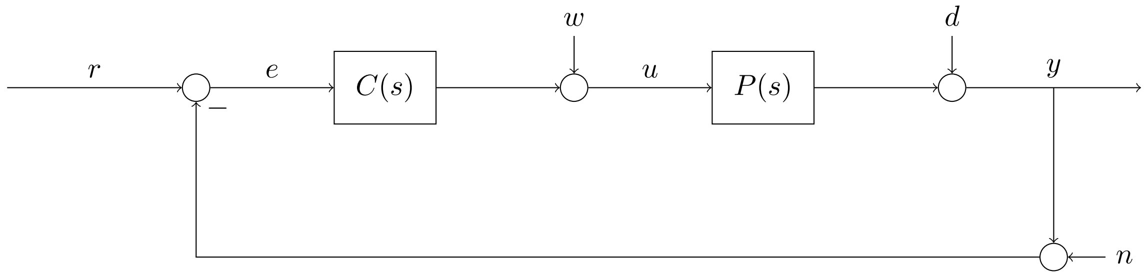

Abbildung 1: Signalflussbild eines Regelsystems mit Rückführung.

Die Kreisverstäkrung ist definiert als

$$L(s) = P(s) \cdot C(s), \tag{1.6}$$

wobei $P(s)$ bezeichnet die Strecke (System) und $C(s)$ bezeichnet den Regler.
Daraus definiert man auch die Sensivität

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \tag{1.7}$$

und die komplementäre Sensivität

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, \tag{1.8}$$

die der Übertragungsfunktion von r nach y entspricht. Aus diesen Definitionen folgt:

$$S(s) + T(s) = 1. \tag{1.9}$$

Der Aussgangsssignal des Systems $Y(s)$ ist gegeben durch

$$Y(s) = T(s) \cdot R(s) + S(s) \cdot D(s) - T(s) \cdot N(s) + S(s) \cdot P(s) \cdot W(s). \tag{1.10}$$

Der Fehler $E(s)$ ist gegeben durch

$$E(s) = S(s) \cdot (R(s) - D(s) - N(s) - P(s) \cdot W(s)). \tag{1.11}$$

In diesen letzten zwei Definitionen $R(s), D(s), N(s), W(s)$ bezeichnen die Laplace Transformiertionen der entsprechenden Signalen $r(t), d(t), n(t), w(t)$.

Zusätzlich definiert man die Durchtrittsfrequenz ω_c, für die gilt

$$|L(j \cdot \omega_c)| = 1 = 0\,\mathrm{dB}. \tag{1.12}$$

1.4 Nyquist Theorem

Ein geschlossener Regelkreis $T(s)$ ist asymptotisch stabil, wenn es

$$n_c = n_+ + \frac{n_0}{2} \tag{1.13}$$

gilt, wobei:

- n_c: Anzahl positiver Umdrehnungen von $L(s)$ (Gegenuhrzeigersinn) um den Punkt -1;
- n_+: Anzahl instabiler Pole von $L(s)$, d.h. mit $\mathrm{Re}(\pi) > 0$;
- n_0: Anzahl grenzstabiler Pole von $L(s)$, d.h. mit $\mathrm{Re}(\pi) = 0$.

Neben der Stabilität braucht man auch eine gewissen Robustheit. Die wird durch den kritische Abstand $\mu_{\min}$, die Phasenreserve φ und die Verstärkungsreserve γ beschrieben. Diese Grössen sind im Bode Diagramm und im Nyquist Diagramm ersichtlich.

1.4.1 Bedingungen für den geschlossenen Regelkreis

Ziel der Regelungstechnik ist die Auslegung eines Reglers. Bevor man das macht, muss man zuerst überprüfen, ob man das System regeln lässt. Neben der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit gibt es zusätzliche Bedingungen für die Durchtrittsfrequenz ω_c, die erfüllt werden müssen, um das System regeln zu können. Für die Durchtrittsfrequenz muss gelten:

$$\max(10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi^+}) < \omega_c < \min(0.5 \cdot \omega_{\zeta^+}, 0.1 \cdot \omega_n, 0.5 \cdot \omega_{\text{delay}}, 0.2 \cdot \omega_2\}, \tag{1.14}$$

wobei:

- $\omega_{\pi^+} = \mathrm{Re}(\pi^+)$: Dominanter (grösster mit $\mathrm{Re}(\pi) > 0$) instabiler Pol;
- $\omega_{\zeta^+} = \mathrm{Re}(\zeta^+)$: Dominante (kleinste mit $\mathrm{Re}(\zeta) > 0$) nichtminimalphasige Nullstelle;
- ω_d: Maximale Störungsfrequenz im System;
- ω_n: Minimale Rauschenfrequenz im System;
- ω_2: Frequenz mit 100% Unsicherheit ($|W_2(j \cdot \omega_2)| = 1$),
- $\omega_{\text{delay}} = \frac{1}{T_{\text{delay}}}$: Grösste Totzeit im System.

2 Loop Shaping

2.1 Streckeninvertierung

Mit diesem kann man die Kreisverstärkung beliebig wählen, so dass sie alle Spezifikationen erfüllt. Der Regler berechnet sich dann als

$$C(s) = \frac{L(s)}{P(s)}. \tag{2.1}$$

Dieses Vorgehen ist nicht geeignet für instabile oder/und nichtminimalphasige Strecken, da sie respektiv zu nichtminimalphasige oder/und instabile Regler führen.

2.2 Loop Shaping für nichtminimalphasige Systeme

Die Reglerauslegung fängt mit einem PI Regler

$$C(s) = k_p \cdot \frac{T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s}. \tag{2.2}$$

Die Parameter k_p und T_i können so eingestellt werden, dass die Kreisverstärkung $L(s)$ die gegebene Spezifikationen (siehe z.B. 1.4.1) erfüllt. Bessere Robustheiteigenschaften erreicht man durch Zuschaltung von Lead/Lag Elementen der Form

$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}, \tag{2.3}$$

wobei $\alpha, T \in \mathbb{R}^+$. Es gilt:

- $\alpha < 1$: Lead-Element: Phasenreserve wird erhöht, Betrag des Reglerkreises verkleinert.
- $\alpha > 1$: Lag-Element: Phasenreserve wird verkleinert, Betrag des Reglerkreises erhöht.

Die Parameter des Elementes berechnen sich als

$$\alpha = \left(\sqrt{\tan^2(\hat{\varphi}) + 1} - \tan(\varphi)\right)^2 = \frac{1 - \sin(\hat{\varphi})}{1 + \sin(\hat{\varphi})}, \qquad T = \frac{1}{\hat{\omega} \cdot \sqrt{\alpha}}, \tag{2.4}$$

wobei $\hat{\omega}$ die Frequenz, bei der den Phasenanstieg geschehen soll, ist und $\hat{\varphi} = \varphi_{\text{neu}} - \varphi$ die (maximale) Phasendifferenz bezeichnet.
Im Allgemeinen geht man (iterativ) wie folgt vor:

1. PI(D) auslegen.
2. Lead-/Lag-Element zuschalten, um die Phasenreserve zu verändern. Die Durchtrittsfrequenz ω_c ändert sich auch.
3. Verstärkung k_p des Regler einstellen, um die Durchtrittsfrequenz anzupassen.

2.3 Loop Shaping für instabile Systeme

Alle Systeme müssen das Nyquist Theorem erfüllen. Wenn man mit instabilen Systemen arbeitet, ist also die Anzahl Umdrehungen n_c ungleich Null. Der Regler muss also so ausgelegt werden, dass es $n_c = n_+ + n_0/2$ gilt. Hilfsreich bei der Reglerauslegung: Nullstellen verursachen einen Phasengewinn von $90°$ und Pole[2] einen Phasenverlust von $-90°$.

2.4 Realisierbarkeit

Nach der Auslegung eines Reglers, muss man diesen implementieren und realisieren können. Dazu muss darauf aufpassen, dass die Anzahl Pole gleich oder grösser als die Anzahl Nullstellen ist. Wenn das nicht der Fall ist, können Pole bei hohen Frequenzen hinzugefügt werden, so dass sie das Verhalten des Systems bei der Durchtrittsfrequenz nicht beeinflussen. Aus diesem Grund schaltet man zum Beispiel den sogenannten Roll-Off Term zum PID Regler

$$C(s) = \underbrace{k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right)}_{\text{PID Regler}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}_{\text{Roll-Off}} \tag{2.5}$$

zu.

[2]Hier wird es angenommen, dass alle Pole stabil sind und alle Nullstellen minimalphasing sind. Instabile Pole und nichtminimalphasige Nullstellen sollten bei Reglern vermieden werden.