Regelungstechnik I PVK - Lösungen

Nicolas Lanzetti
lnicolas@student.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Regelungstechnik und Systeme

1. Siehe Serie 1 RT1, Aufgabe 2.
2. Die Übertragungsfunktion $u \to y$ ist gegeben durch
$$\Sigma = (1 - \Sigma_1)^{-1} \cdot (\Sigma_1 \cdot \Sigma_2 + \Sigma_1) + \Sigma_2.$$
Für SISO System gilt dann
$$\Sigma = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{1 - \Sigma_1}.$$
Bemerkung. Für MIMO Systeme 1 ist die Identitätsmatrix $\mathbb{I}$.
3. Die Übertragungsfunktion $u \to y$ ist gegeben durch
$$\Sigma = (1 + \Sigma_2 \cdot \Sigma_3)^{-1} \cdot (-\Sigma_1).$$
Für SISO System gilt dann
$$\Sigma = \frac{-\Sigma_1}{1 + \Sigma_2 \cdot \Sigma_3}.$$
Bemerkung. Für MIMO Systeme 1 ist die Identitätsmatrix $\mathbb{I}$.

2 Modellierung eines dynamischen Systems

1. Siehe Prüfung RT1 2006-1, Aufgabe 2.
2. Siehe Prüfung RT1 2010-1, Aufgabe 1.
3. Siehe Prüfung RT1 2010-2, Aufgabe 1.
4. Es gilt:
$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad d = 0.$$
5. Es gilt:
$$A = \begin{bmatrix} -9 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} -14 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad d = 0.$$

3 Analyse linearer Systeme

1. Siehe Prüfung RT1 2010-1, Aufgabe 7.
2. Siehe Serie 4 RT1, Aufgabe 2.
3. Die Dimensionen der Matrizen sind in folgender Tabelle gezeigt.

Matrix	Anzahl Zeilen	Anzahl Spalten
A	4	4
B	4	3
C	2	4
D	2	3

4. Siehe Prüfung RT1 2010-2, Aufgabe 7.

5.
```
A = [1 0 0 ; 0 1 1; 2 0 1];
b = [1; 0; -1];
c = [2 0 1];
d = 0;
rank(ctrb(A,b))
rank(obsv(A,c))
eig(A)
sigma = tf(ss(A,b,c,d))
pole(sigma)
zero(sigma)
```

6. (a) Richtig, siehe Prüfung RT1 2010-2, Aufgabe 8.
   (b) Richtig, siehe Prüfung RT1 2010-2, Aufgabe 8.

4 Frequenzbereich

1. Siehe Prüfung RT1 2010-1, Aufgabe 4.
2. Siehe Serie 6 RT1, Aufgabe 1.
3. Siehe Prüfung RT1 2010-2, Aufgabe 4.
4. Siehe Prüfung RT1 2010-2, Aufgabe 4.
5. Das DGL-System lässt sich entkoppeln und somit bekommt man

$$x_2(t) = -e^{5\cdot t}, \qquad x_3(t) = 3\cdot e^{3\cdot t}.$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert eine DGl für $x_1(t)$. Die Lösung ist

$$x_1(t) = \frac{3}{7}\cdot e^{-2\cdot t} - \frac{3}{7}\cdot e^{5\cdot t} + 2\cdot e^{-2\cdot t}.$$

Der Ausgang des System ist dann

$$y(t) = 17\cdot e^{-2\cdot t} + 3\cdot e^{3\cdot t}.$$

6. (a) Es gilt:

$$\Sigma_1(s) = \frac{1}{s^2 - 8\cdot s - \alpha}, \qquad \Sigma_2(s) = \frac{s-5}{s+7}.$$

Die gesamte Übertragungsfunktion ist somit

$$\Sigma(s) = \Sigma_1(s)\cdot\Sigma_2(s) = \frac{1}{s^2 - 8\cdot s - \alpha}\cdot\frac{s-5}{s+7}.$$

Das System ist nicht voll. steurbar oder beobachtabar falls eine Pol-Nullstelle-Kürzung vorliegt, d.h.

$$\frac{8 \pm \sqrt{64 + 4\cdot\alpha}}{2} = 4 \pm \sqrt{16+\alpha} \overset{!}{=} 5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -15.$$

   (b) Zweiter Ordnung.

(c) Die Zustandsraumdarstellung ist:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21 & -4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad d = 0.$$

7. Ein System ist BIBO stabil, falls

$$\int_0^\infty |\sigma(t)| \, \mathrm{d}t < \infty.$$

Darum sind nur Sytem 3 und 6 BIBO stabil.
Lyapunov Stabilität: siehe 4.5.1 im Skript.

5 Frequenzantworten

1. Aus Kapitel 5 ist die Antwort zu der Anregung $u(t) = \cos(t)$ in eigenschwungerem Zustand (nach unendlicher Zeit) gegeben durch

$$y_\infty(t) = |\Sigma(j \cdot \omega)| \cdot \cos(\omega \cdot t + \angle(\Sigma(j \cdot \omega))),$$

d.h. der Input wir mit dem Faktor $|\Sigma(j \cdot \omega)|$ verstärkt und um die Phase $\angle(\Sigma(j \cdot \omega))$ verschoben. Die Frequenz ändert sich nicht[1].

(a) Die Antwort ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= 10 \cdot \left| \frac{1}{2 \cdot j + 1} \right| \cdot \cos\left(2 \cdot t + \angle\left(\frac{1}{2 \cdot j + 1}\right)\right) \\ &= \frac{10}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \cdot \cos(2 \cdot t - \arctan(2)) \\ &= 4.4721 \cdot \cos(2 \cdot t - 1.1071). \end{aligned}$$

(b) Mit dem Hinweis folgt

$$u(t) = 2 \cdot \sin(4 \cdot t).$$

Die Antwort ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \cdot \left| \frac{1}{4 \cdot j + 1} \right| \cdot \sin\left(4 \cdot t + \angle\left(\frac{1}{4 \cdot j + 1}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{4^2 + 1^2}} \cdot \sin(4 \cdot t - \arctan(4)) \\ &= 0.4851 \cdot \sin(4 \cdot t - 1.3258). \end{aligned}$$

Bemerkung. Hier ist Input sinusförmig, somit wird die Antwort auch sinusförmig sein. Zwei Wege, das zu zeigen: Man kann entweder den Beweis, der für den Input $u(t) = \cos(\omega \cdot t)$ gemacht wurde, auch für $u(t) = \sin(\omega \cdot t)$ machen oder, einfacher, die Sinusfunktion in eine Cosinusfunktion durch Hinzufügen einer Phase umwandeln, das Signal als Cosinus betrachten und dann am Ende wiederum in Sinus transformieren.

2. (a) Da das System linear ist (wie alle betrachteten Systeme ...) können die zwei Teile des Inputs separat analysiert werden und dann am Ende addiert. Das Vorgehen ist analog wie in der vorherigen Aufgabe. Die Antwort ist

$$y(t) = 0.7071 \cdot \cos(t - 0.7854) + 0.6325 \cdot \sin(3 \cdot t - 3 \cdot \pi - 1.2490).$$

[1] Diese ist eine sehr wichtige Eigenschaft von linearen zeitinvarianten Systemen.

(b) Der Input hat $\omega = 0$. Da $P(0) = 1$ wird der Input weder verstärkt und noch verschoben, somit gilt
$$y(t) = h(t).$$

3. Siehe Prüfung RT1 2010-1, Aufgabe 2.

4. Siehe Prüfung RT1 2010-2, Aufgabe 5.

5. Mit Hilfe des Bode Diagramms bekommt man:

   (a) $y(t) = 0.2 \cdot \cos(10 \cdot t - 170^\circ)$;

   (b) $y(t) = 200 \cdot \cos(0.1 \cdot t - 95^\circ)$.

6. MATLAB Code:
```
s = tf('s');
P = 10*(0.1*s+1)/((s+1)*(s+1));
nyquist(P)
bode(P)
```

7. Siehe Serie 7 RT1, Aufgabe 2.

8. Siehe Serie 7 RT1, Aufgabe 1.

6 Analyse von Feedback-Systemen

1. Siehe Prüfung RT1 2010-1, Aufgabe 6.

2. Siehe Prüfung RT1 2010-1, Aufgabe 2.

Übertragungsfunktion	$L_1(s)$	$L_2(s)$	$L_3(s)$	$L_4(s)$
Nyquistdigramm	C	D	B	A
Sprungantwort	2	1	4	3

3. Siehe Serie 10 RT1, Aufgabe 2.

4. (a) Es gilt:
$$\omega_c = 0.85\,\text{rad}/\text{s}, \qquad \varphi = 45^\circ, \qquad \gamma = \infty.$$
   Für dieses System ist ω^* nicht definiert.

   (b) Es gilt:
$$\omega_c = 0.60\,\text{rad}/\text{s}, \qquad \varphi = 50^\circ, \qquad \gamma = 11\,\text{dB}, \qquad \omega^* = 1.20\,\text{rad}/\text{s}$$

5. Die Strecke hat einen Pol bei +20, somit muss die Durchtrittsfrequenz des Reglers folgende Ungleichung erfüllen:
$$\omega_c > 2 \cdot \pi_1 = 40\,\text{rad}/\text{s}.$$
   Bei EM-1 und EM-2 ist die Verstärkung bei $40\,\text{rad}/\text{s}$ fast 0 ($-40\,\text{dB}, -20\,\text{dB}$). Bei dieser Frequenz können also die zwei Motoren nicht folgen (es ist nicht gut wenn die Antowort des Systems fast Null ist ...) und somit kommt nur EM-3 in Frage, der auf solche Frequenzen gut reagieren kann (Verstärkung von $0\,\text{dB} \approx 1$).
   Siehe Prüfung RT1 2010-2, Aufgabe 6.

6. (a) Das Regelsystem hat die Übertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{9 \cdot s + 18}{s^2 + 10 \cdot s + 25}.$$

Im Laplace Bereich gilt es

$$Y(s) = T(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{9 \cdot s + 18}{s^2 + 10 \cdot s + 25} \cdot \frac{1}{s}.$$

Mit der Laplace Inverse Transformation bekommt man

$$y(t) = \frac{9}{25} \cdot \left(2 - 2 \cdot e^{-5 \cdot t} + 15 \cdot t \cdot e^{-5 \cdot t}\right).$$

(b) Mit (a) bekommt man direkt

$$e_\infty = r_\infty - y_\infty = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}.$$

7. Siehe Serie 11 RT1, Aufgabe 2.

8. (a) i. $P_1(s), C_1(s) : e_\infty = 0$
   ii. $P_1(s), C_2(s) : e_\infty = 0.5$
   iii. $P_2(s), C_1(s) : e_\infty = 0$
   iv. $P_2(s), C_2(s) : e_\infty = 0$

   (b) i. $P_1(s), C_1(s) : e_\infty = 0$
   ii. $P_1(s), C_2(s) : e_\infty = -0.5$
   iii. $P_2(s), C_1(s) : e_\infty = 0$
   iv. $P_2(s), C_2(s) : e_\infty = -1$

   Bemerkung. Obwohl die zweite Strecke schon integrierend ist, bekommt man für $w(t) = h(t)$ einen Regelerfehler. Die Regel "Integrator in der Strecke $\rightarrow e_\infty = 0$" gilt nur für die Fälle $n(t) = h(t)$,$d(t) = h(t)$ und $r(t) = h(t)$ und nicht für den Fall $w(t) = h(t)$. Am besten buntzt man die Formel

$$E(s) = S(s) \cdot (R(s) - D(s) - N(s) - P(s) \cdot W(s))$$

   und das Endwerttheorem (siehe 6.6). Mehr dazu in folgendem MATLAB-Skript:
   `http://n.ethz.ch/student/lnicolas/Files/Regelungstechnik1/Uebung11-MATLAB.m`.

9. Siehe Serie 10 RT1, Aufgabe 1.

10. Die Übertragungsfunktion des Systems ist gegeben durch

$$T(s) = 2 \cdot \frac{1}{s^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot s + 1} = \frac{2}{s^2 + s + 1}$$

7 Feedback Control Design

1. Siehe Prüfung RT1 2010-1, Aufgabe 3.

2. Siehe Prüfung RT1 2010-2, Aufgabe 3.

3. Die Strecke hat

$$k_p^* = \frac{\pi}{10}, \qquad T^* = 2\,\mathrm{s}.$$

   Die gesuchten Parameter sind somit

$$k_p = 0.055 \cdot \pi, \qquad T_d = 0.3\,\mathrm{s}.$$

4. (a) Da die Strecke (und somit auch die Kreisverstärkung) BIBO-stabil ist, besitzen alle Polen einen negativen Realteil. Darum sind $n_+ = n_0 = 0$. Es muss also $n_c = 0$ gelten. Da bei der Phase π ist $L(s) = 0$ und bei der Phase 0 ist $L(s) \approx -7\,\text{dB} \approx 0.46$ macht das System für alle
$$k_p \in \left(-\frac{1}{0.46}, \infty\right)$$
keine Umdrehungen um den Punkt -1 und ist deshalb asymptotisch stabil.

   (b) Für $k_p = 50\,\text{dB} = 316.2278$ sind die Anfordetung am besten erfüllt.

   Bemerkung. Die Strecke ist gegeben durch
$$P(s) = \frac{46.24}{s^2 + 101 \cdot s + 100}.$$
Das ist für das Lösen der Aufgabe nicht notwendig. Sie können jedoch die Ergebnisse im MATLAB visualisieren.

5. (a) Falsch, siehe Prüfung RT1 2010-1, Aufgabe 8.

   (b) Falsch, siehe Prüfung RT1 2010-1, Aufgabe 8.

6. Siehe Serie 13 RT1, Aufgabe 1.