Aufgabe 3 (Reglerauslegung) 10 Punkte

Fux (Shafai)

Gegeben sei das folgende System

$$P(s) = \frac{1}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

Ihre Vorgesetze verlangt von Ihnen und Ihrem Kollegen, dass Sie für dieses System einen Regler entwickeln. Sie schlagen vor, dass man einen PID-Regler verwendet, und die Reglerparameter mittels der Methode von Ziegler/Nichols auslegt.

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die kritische Verstärkung k_p^*, sowie die kritische Frequenz ω^*.

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie nun daraus mittels der Methode von Ziegler/Nichols die Parameter k_p, T_i und T_d des folgenden PID-Reglers

$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \left[1 + \frac{1}{s \cdot T_i} + s \cdot T_d\right]$$

Anschliessend berechnet Ihr Kollege mit MATLAB, dass das Regelsystem mit dem von Ihnen vorgeschlagenen Regler eine Phasenreserve von 24.8° hat. Da ihr Kollege mit dieser Phasenreserve nicht zufrieden ist und mehr Phasenreserve möchte, schlägt er vor, statt $C_{PID}(s)$ den folgenden Regler zu verwenden

$$C_2(s) = 2 \cdot s \cdot (2 - s)$$

c) (5 Punkte) Da Ihre Vorgesetzte sicher gehen will, dass die Phasenreserve nun grösser ist, werden Sie aufgefordert, die Phasenreserve des Regelsystems $C_2(s) \cdot P(s)$ zu berechnen.

Lösung 3

a) Zur Bestimmung der kritischen Verstärkung k_p^* und der kritischen Frequenz ω^* kann die folgende Beziehung verwendet werden:

$$k_p^* \cdot P(j\omega^*) = -1$$

Es folgt somit:

$$\begin{aligned}
\frac{k_p^*}{-j\,(\omega^*)^3 - 3\,(\omega^*)^2 + 2j\omega^*} &= -1 \\
k_p^* &= -\left(-3\,(\omega^*)^2 - j\left((\omega^*)^3 - 2\omega^*\right)\right) \\
k_p^* &= 3\,(\omega^*)^2 + j\left((\omega^*)^3 - 2\omega^*\right)
\end{aligned}$$

Aus dem Vergleich des Imaginärteils findet man

$$(\omega^*)^3 - 2\omega^* = \omega^* \cdot \left((\omega^*)^2 - 2\right) = 0$$

Da wir nur an positiven realen Frequenzen interessiert sind, folgt $\omega^* = \sqrt{2}$.
Aus dem Vergleich des Realteils folgt:

$$k_p^* = 3\,(\omega^*)^2 = 6$$

b) Aus der Tabelle erhalten wir die Werte für einen PID-Regler:

$$k_p = 0.6 \cdot k_p^* = 3.6$$

$$T_i = 0.5 \cdot T^* = 0.5 \cdot \frac{2\pi}{\omega^*} = 0.5 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \approx 2.2214$$

$$T_d = 0.125 \cdot T^* = 0.125 \cdot \frac{2\pi}{\omega^*} = 0.125 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \approx 0.5554$$

c) Um die Phasenreserve berechnen zu können, muss man die Phase des offenen Regelkreises bei der Durchtrittsfrequenz berechnen.
Die Durchtrittsfrequenz ω_c findet man durch Lösen der Gleichung $|C_2(j\omega_c) \cdot P(j\omega_c)| = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{|2 \cdot j\omega_c \cdot (2 - j\omega_c)|}{|j\omega_c \cdot (j\omega_c + 1) \cdot (j\omega_c + 2)|} &= 1 \\
\frac{|2| \cdot |j\omega_c| \cdot |2 - j\omega_c|}{|j\omega_c| \cdot |j\omega_c + 1| \cdot |j\omega_c + 2|} &= 1 \\
\frac{2 \cdot \sqrt{4 + \omega_c^2}}{\sqrt{\omega_c^2 + 1} \cdot \sqrt{\omega_c^2 + 4}} &= 1 \\
\frac{2}{\sqrt{\omega_c^2 + 1}} &= 1 \\
4 &= \omega_c^2 + 1 \\
3 &= \omega_c^2
\end{aligned}$$

Da wir nur an positiven realen Frequenzen interessiert sind, folgt $\omega_c = \sqrt{3}$.
Für die Phase bei der Durchtrittsfrequenz ω_c ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\angle(L(j\omega_c) &= \angle(2 \cdot j\omega_c) + \angle(2 - j\omega_c) - \angle(j\omega_c) - \angle(j\omega_c + 1) - \angle(j\omega_c + 2) \\
&= \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{-\omega_c}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_c}{1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Dies ergibt folgenden Wert für die Phase bei der Durchtrittsfrequenz:

$$\angle(L(j\omega_c) \approx -40.9\,^\circ\mathrm{C} - 60\,^\circ\mathrm{C} - 40.9\,^\circ\mathrm{C} = -141.8\,^\circ\mathrm{C}$$

Daraus folgt, dass das Regelsystem mit dem Regler $C_2(s)$ eine Phasenreserve von $38.2\,^\circ\mathrm{C}$ hat.