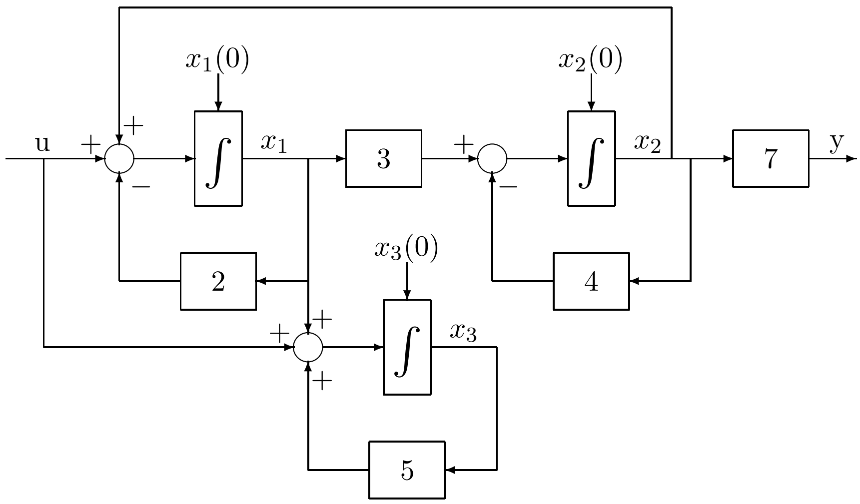
Aufgabe 3 (Systemanalyse) 9 Punkte

Gegeben sei das detaillierte Signalflussbild eines linearen dynamischen Systems mit Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$:



a) (2 Punkte) Leiten Sie die Systemmatrizen A, b, c, d des gegebenen Systems her.

b) (1 Punkt) Ist das gegebene System vollständig steuerbar? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch.

c) (1 Punkt) Ist das gegebene System vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch.

d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems. Ist es Lyapunov stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) (1 Punkt) Ist das System stabilisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

f) (2 Punkte) Leiten Sie die Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ des Systems her. Berechnen Sie die Pole und Nullstellen.

Lösung 3

a) (2 Punkte)
Die Systemgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= 3x_1(t) - 4x_2 \\
\dot{x}_3(t) &= x_1(t) + 5x_3(t) + u(t) \\
y(t) &= 7x_2(t)
\end{aligned}$$

Die Systemmatrizen A, b, c, d sind:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

b) (1 Punkt)
Das System ist vollständig steuerbar.

$$\mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} b & A \cdot b & A^2 \cdot b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -18 \\ 1 & 6 & 28 \end{bmatrix}$$

Die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}_3$ hat vollen Rang ($\text{Rang}(\mathcal{R}_3) = 3$).

c) (1 Punkt)
Das System ist NICHT vollständig beobachtbar.

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 21 & -28 & 0 \\ -126 & 133 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}_3$ hat nicht vollen Rang ($\text{Rang}(\mathcal{O}_3) = 2$).

d) (2 Punkte)
Die Lyapunov Stabilität kann anhand der Eigenwerte λ_i der Systemmatrix A beurteilt werden:

$$\begin{aligned} det(\lambda I - A) &= det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda + 4 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + 2)(\lambda + 4)(\lambda - 5) - 3(\lambda - 5) \\ &= (\lambda - 5)(\lambda^2 + 6\lambda + 5) \overset{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Die drei Eigenwerte sind:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -5, \quad \lambda_3 = -1$$

Das System hat einen Eigenwert mit positivem Realteil und ist somit instabil.

e) (1 Punkt)
Das instabile Subsystem x_3 ist zwar steuerbar, aber nicht beobachtbar. Deshalb lässt sich das System nicht stabilisieren.

f) (2 Punkte)
Die Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems n-ter Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ y(t) &= c \cdot x(t) \end{aligned}$$

lautet:

$$\begin{aligned} \Sigma(s) &= c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b = \frac{c \cdot \text{Adj}(sI - A) \cdot b}{\det(sI - A)} \\ &\overset{PNK}{=} \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad m < n \end{aligned}$$

Eventuelle gemeinsame Wurzeln[1] des Zählers und des Nenners werden im dritten Schritt der Rechnung gekürzt (Pol-Nullstellen-Kürzung).

Für das gegebene System berechnet sich die Determinante der Matrix:

$$det(sI - A) = det \begin{pmatrix} s+2 & -1 & 0 \\ -3 & s+4 & 0 \\ -1 & 0 & s-5 \end{pmatrix} = (s-5)(s^2+6s+5)$$

Aufgrund der 0-Einträge in den Vektoren b und c benötigt man für die Berechnung des Zählerpolynoms von $\Sigma(s)$ nur zwei Einträge der Adjungierten $\mathrm{Adj}(sI - A)$.

$$[\mathrm{Adj}(sI - A)]_{21} = (-1)^{2+1} \det((sI - A)_{12}) = -\det(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & s-5 \end{bmatrix}) = 3\,(s-5)$$
$$[\mathrm{Adj}(sI - A)]_{23} = (-1)^{2+3} \det((sI - A)_{32}) = -\det(\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}) = 0$$

Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} c \cdot \mathrm{Adj}(sI - A) \cdot b &= \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \# & \# & \# \\ 3\,(s-5) & \# & 0 \\ \# & \# & \# \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \# \\ 3\,(s-5) \\ \# \end{bmatrix} \\ &= 21\,(s-5) \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion lautet somit nach der Pol-Nullstellen-Kürzung von $(s-5)$:

$$\Sigma(s) = \frac{21}{s^2 + 6s + 5}$$

Die Pole π_k des Systems entsprechen den Wurzeln des Nennerpolynoms $a(s)$ von $\Sigma(s)$:

$$\pi_1 = -5, \quad \pi_2 = -1$$

Die Nullstellen ξ_j sind die Wurzeln des Zählerpolynoms $b(s)$. Das System hat keine Nullstellen.

[1] Nullstellen eines Polynoms

Aufgabe 2 (Zeitbereich und Frequenzbereich) 9 Punkte

Folgende Differentialgleichung beschreibt das dynamische Verhalten eines Systems:

$$\dddot{y}(t) + 9\,\ddot{y}(t) + 24\,\dot{y}(t) + 16\,y(t) = \ddot{u}(t) + 5\,\dot{u}(t) + 6\,u(t)$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie für diese Differentialgleichung das Zustandsraummodell in steuerbarer Standardform und zeichnen Sie das Signalflussbild.

b) (2 Punkte) Leiten Sie die Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ dieses Systems her. Die Anfangsbedingungen sind:

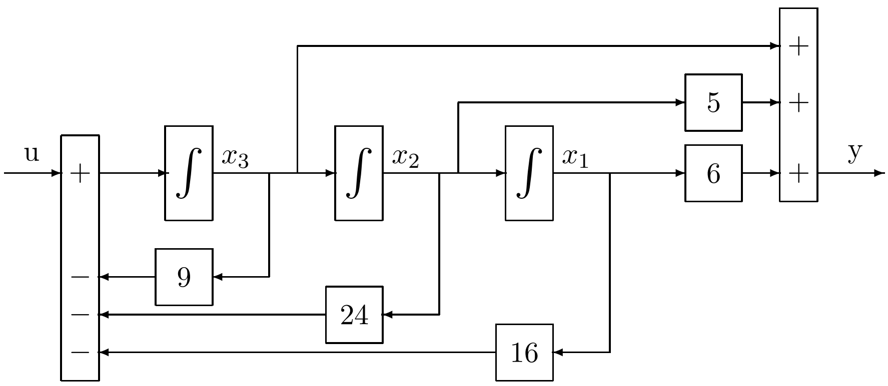
$$y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = u(0) = \dot{u}(0) = 0$$

Lösung 2

a) (2 Punkte)
Das Zustandsraummodell in steuerbarer Standardform lautet:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -16 & -24 & -9 & 1 \\ \hline 6 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Das Signalflussbild des Systems hat folgende Form:



b) (2 Punkte)
Das Laplace transformierte System lautet:

$$s^3\,Y(s) + 9\,s^2\,Y(s) + 24\,s\,Y(s) + 16\,Y(s) = s^2\,U(s) + 5\,s\,U(s) + 6\,U(s)$$

daraus folgt die Übertragungsfunktion:

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 5\,s + 6}{s^3 + 9\,s^2 + 24\,s + 16}$$