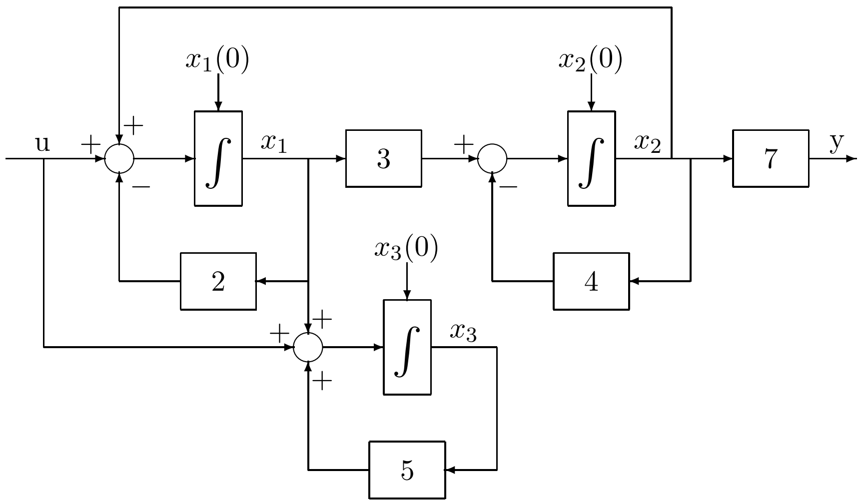
Aufgabe 3 (Systemanalyse) **9 Punkte**

Gegeben sei das detaillierte Signalflussbild eines linearen dynamischen Systems mit Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$:



a) (2 Punkte) Leiten Sie die Systemmatrizen A, b, c, d des gegebenen Systems her.

b) (1 Punkt) Ist das gegebene System vollständig steuerbar? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch.

c) (1 Punkt) Ist das gegebene System vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch.

d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems. Ist es Lyapunov stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) (1 Punkt) Ist das System stabilisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 3

a) (2 Punkte)
Die Systemgleichungen lauten:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= 3x_1(t) - 4x_2 \\
\dot{x}_3(t) &= x_1(t) + 5x_3(t) + u(t) \\
y(t) &= 7x_2(t)
\end{aligned}
$$

Die Systemmatrizen A, b, c, d sind:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

b) (1 Punkt)
Das System ist vollständig steuerbar.

$$\mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} b & A \cdot b & A^2 \cdot b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -18 \\ 1 & 6 & 28 \end{bmatrix}$$

Die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}_3$ hat vollen Rang (Rang$(\mathcal{R}_3) = 3$).

c) (1 Punkt)
Das System ist NICHT vollständig beobachtbar.

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 21 & -28 & 0 \\ -126 & 133 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}_3$ hat nicht vollen Rang (Rang$(\mathcal{O}_3) = 2$).

d) (2 Punkte)
Die Lyapunov Stabilität kann anhand der Eigenwerte λ_i der Systemmatrix A beurteilt werden:

$$\begin{aligned} det(\lambda I - A) &= det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda + 4 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + 2)(\lambda + 4)(\lambda - 5) - 3(\lambda - 5) \\ &= (\lambda - 5)(\lambda^2 + 6\lambda + 5) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Die drei Eigenwerte sind:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -5, \quad \lambda_3 = -1$$

Das System hat einen Eigenwert mit positivem Realteil und ist somit instabil.

e) (1 Punkt)
Das instabile Subsystem x_3 ist zwar steuerbar, aber nicht beobachtbar. Deshalb lässt sich das System nicht stabilisieren.