Analysis PVK - Lösungen

Nicolas Lanzetti
lnicolas@student.ethz.ch

3 Differentialrechnung

1. (a) $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{(x\cdot\ln(x))} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln(x))}$ (da e^x stetig ist)
$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{1} = 0$
Deshalb ist $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln(x))} = e^0 = 1$
Bemerkung. Das zeigt nicht, dass $0^0 = 1$. Es geht nur um einen Grenzwert.
   (b) 0
   (c) 1/2
   (d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \overset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right) =$
$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(y)}\cos(y) = = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(y)}{y}}\cdot\lim_{y\to 0}\cos(y) = \frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}}\cdot 1 = \frac{1}{1}\cdot 1 = 1$

2. (a) 1
   (b) 1/8 (Siehe Analysis I, Serie 3, Aufgabe 3)
   (c) -1 (Siehe Analysis I, Serie 3, Aufgabe 3)
   (d) 1/2 (Siehe Analysis I, Serie 3, Aufgabe 3)
   (e) 1 (Siehe Analysis I, Serie 3, Aufgabe 3)
   (f) 0 (Siehe Analysis I, Serie 7, Aufgabe 1)
   (g) $e^{-1/2}$ (Siehe Analysis I, Serie 7, Aufgabe 1)
   (h) 3 (Siehe Analysis I, Serie 7, Aufgabe 1)

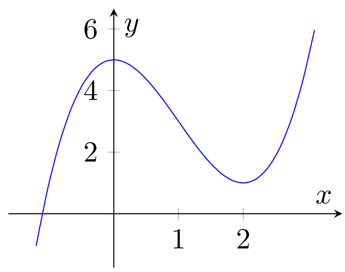
3. (a) $g_1(x) = 1-x \qquad h_1(x) = x^5 \qquad g_1'(x) = -1 \qquad h_1'(x) = 5\cdot x^4$
$f_1'(x) = (h_1(g_1(x)))' = h_1'(g_1(x))\cdot g_1'(x) = 5\cdot(1-x)^4\cdot(-1) = -5\cdot(1-x)^4$
   (b) $g_2(x) = x^{\frac{1}{2}} + \cos(x) \qquad h_2(x) = x^{18} \qquad g_2'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} - \sin(x) \qquad h_2'(x) = 18\cdot x^{17}$
$f_2'(x) = (h_2(g_2(x)))' = h_2'(g_2(x))\cdot g_2'(x) = 18\cdot(\sqrt{x}+\cos(x))^{17}\cdot(\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} - \sin(x))$
   (c) $f_3(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\cdot\ln(x)}$
$g_3(x) = x\cdot\ln(x) \qquad h_3(x) = e^x \qquad g_3'(x) = \ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} \qquad h_3'(x) = e^x$
$f_3'(x) = (h_3(g_3(x)))' = h_3'(g_3(x))\cdot g_3'(x) = e^{x\cdot\ln(x)}\cdot(\ln(x)+1) = x^x\cdot(\ln(x)+1)$
   (d) $f_4(x)$ ist die Inverse von $h_4(x) = \frac{1}{2}\cdot\cos(x) \qquad h_4'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\sin(x)$
$f_4'(x) = \frac{1}{h_4'(f_4(x))} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\cdot\sin(\arccos(2x))} = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(2x))}} = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

4. (a) $e^{\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{2x^{5/2}}\right)$
   (b) $14/5\cdot(1-7x)^{-7/5}$
   (c) $2014\cdot\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{2013}\cdot\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right)$

5. (a) 1
   (b) $-\sin(\sin x)\cdot\cos x + \cos(\cos x)\cdot\sin x$
   (c) $-3x^2\cdot\left(1+(\cot(x^3))^2\right)$

6. Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 6x = x\cdot(3x-6) \qquad f''(x) = 6x-6$

   - $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$, so ist $x = 0$ eine (lokale) Maximalstelle (Maximum $f(0) = 5$)
   - $f'(2) = 0$ und $f''(2) > 0$, so ist $x = 2$ eine (lokale) Minimalstelle (Minimum $f(2) = 1$)
   - $f''(1) = 0$, $f(x)$ konkav im $(-\infty, 0)$ und konvex im $(0,\infty)$, so ist $x = 1$ ein Wendepunkt



7. Siehe Analysis I, Serie 7, Aufgabe 3
8. Siehe Analysis I, Serie 8, Aufgabe 2

4 Funktionen von mehreren Variablen, Differentialrechnung

1. (a) $f = e^z \cdot \sin(xy) + C$
   (b) nicht vollständig

2.
   - $\phi = y \cdot e^{x+2z}$ $\quad \phi_y = e^{x+2z}$ $\quad \phi_z = 2y \cdot e^{x+2z}$
   - $\psi = e^{x+2z} + \cos(y)$ $\quad \psi_x = e^{x+2z}$ $\quad \psi_z = 2e^{x+2z}$
   - $\chi = 2y \cdot e^{x+2z}$ $\quad \chi_x = 2y \cdot e^{x+2z}$ $\quad \chi_y = 2e^{x+2z}$

   Da $\phi_x = \psi_y$, $\phi_z = \chi_x$ und $\psi_z = \chi_z$ sind die Integrabilitätsbedinungen erfüllt:

   - $f = \int \phi dx = y \cdot e^{x+2z} + C(y, z)$
   - $f = \int \psi dy = y \cdot e^{x+2z} + \sin(y) + C(x, z)$
   - $f = \int \chi dz = y \cdot e^{x+2z} + C(x, y)$

   Deshalb ist die gesuchte Funktion $f(x, y, z) = y \cdot e^{x+2z} + \sin(y) + C$.

3. Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 9

4. Siehe Analysis II, Schnellübung 1, Aufgabe 4

5. Siehe *Stammbach*, Seite 201

6. Man finde Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = x - y$ auf dem Dreieck D, dessen Rand durch die Punkte $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ geht.

   - grad$f = (1, -1) \neq (0, 0)$ für alle $(x, y) \in D$
   - Rand:
     - $\vec{r_1} = (0, t) \quad t \in [0, 1] \longrightarrow f(\vec{r_1}) = -t \longrightarrow f'(\vec{r_1}) = -1 \neq 0$
     - $\vec{r_2} = (t, 1-t) \quad t \in [0, 1] \longrightarrow f(\vec{r_2}) = t - (1-t) \longrightarrow f'(\vec{r_1}) = 2 \neq 0$
     - $\vec{r_3} = (t, 0) \quad t \in [1, 0] \longrightarrow f(\vec{r_3}) = t \longrightarrow f'(\vec{r_1}) = 1 \neq 0$
   - Eckepunkte
     - $(0, 0) \longrightarrow f(0, 0) = 0$
     - $(1, 0) \longrightarrow f(1, 0) = 1$
     - $(0, 1) \longrightarrow f(0, 1) = -1$

   Deshalb das Maximum der Funktion ist 1 und das Minimum ist -1.

7. Man bestimme die Extrema von $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + 1$ auf dem Einheitskreis.

   - grad$f = (2x + 1, 2y) \stackrel{!}{=} (0, 0) \longrightarrow (-0.5, 0) \longrightarrow f(-0.5, 0) = \frac{3}{4}$
   - Rand: $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ mit $t \in [0, 2\pi)$
     $f(\vec{r}(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) + \cos(t) + 1 = \cos(t) + 2$
     $f'(\vec{r}(t)) = -\sin(t) \stackrel{!}{=} 0 \longrightarrow t = k\pi$
     Nur $t_1 = 0$ und $t_3 = \pi$ sind im Definitionsbereich von t:
     - $\vec{r}(t_1) = (1, 0) \longrightarrow f(1, 0) = 3$
     - $\vec{r}(t_2) = (-1, 0) \longrightarrow f(-1, 0) = 1$
   - Eckepunkte: Wir haben keine Eckepunkte.

   Das Maximum ist 3 in $(1, 0)$ und das Minimum $\frac{3}{4}$ in $(-0.5, 0)$.

5 Integralrechnung

1. (a) $\tan x - x + C$ (Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 1d)
   (b) $\pi^2 - 4$ (Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 1f)
   (c) $\frac{1}{4} \cdot \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$ (Siehe Analysis I, Zusätzliche Serie Integrale, Aufgabe 3a)
2. (a) $-x \cdot \cot x + \log|\sin x| + C$ (Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 1a)
   (b) $2 \cdot \arctan \sqrt{e^x - 1} + C$ (Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 1b)
   (c) $1/3 \cdot x^3 \cdot \log x - 1/9 \cdot x^3 + C$ (Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 1c)
3. (a) $\frac{1}{2} \cdot (\ln|1-x| - \ln|1+x|) + x + C = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x + C$
   (b) $2\arctan(x) + 2\ln|1-x| - \ln|1+x^2| + C = 2\arctan(x) + \ln\left(\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right) + C$
   (c) $\frac{2}{1-x} + 3\ln|x-1| + \ln|1+x| + C$
4. (a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{\xi\to\infty} \int_0^\xi \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{\xi\to\infty} \arctan x|_0^\xi = \lim_{\xi\to\infty} \arctan(\xi) = \frac{\pi}{2}$
   (b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\xi\to 1^-} \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\xi\to 1^-} \arcsin(x)|_0^\xi = \lim_{\xi\to 1^-} \arcsin(\xi) = \frac{\pi}{2}$
5. (a) ∞ (Siehe Analysis I, Serie 13, Aufgabe 8a)
   (b) $1/\ln 2$ (Siehe Analysis I, Serie 13, Aufgabe 8b)
   (c) ∞ (Siehe Analysis I, Serie 13, Aufgabe 8c)
6. $F'(x) = f(\sin x) \cdot \cos x$ (Hauptsatz der Integralrechnung)
7. $f^{(3)}(0) = 3$ (Siehe Analysis II, Serie 7, Aufgabe 1)

6 Anwendung der Differentialrechnung - Ebene Kurven

1. $\vec{OP} = ((R\cos(\omega t) + r\cos((\Omega+\omega)t), R\cos(\omega t) + r\cos((\Omega+\omega)t))$
   (Siehe Analysis I, Serie 9, Aufgabe 5)

2. Siehe Analysis I, Serie 9, Aufgabe 4

3. Siehe *Stammbach*, Seite 206

4. $\dot{x}(t) = \cos(t) \qquad \ddot{x}(t) = -\sin(t) \qquad \dot{y}(t) = \sinh(t) \qquad \ddot{y}(t) = \cosh(t)$
   $k(t) = \frac{\cos(t)\cdot\cosh(t)+\sin(t)\cdot\sinh(t)}{(\cos^2(t)+\sinh^2(t))^{\frac{3}{2}}} \qquad k(0) = \frac{1+0}{1} = 1 \qquad \rho(0) = \frac{1}{k(0)} = 1$

5. Siehe Analysis I, Serie 5, Aufgabe 5

6. Siehe Analysis I, Serie 10, Aufgabe 1

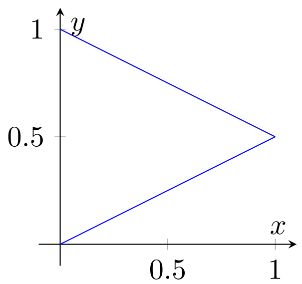
7. $-x + y - z + 1 = 0$

8. Siehe Analysis II, Serie 3, Aufgabe 1

9. $\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = 3$

7 Anwendung der Integralrechnung

1. Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 1
2. $J_0 = 42$ (Siehe Analysis I, Serie 13, Aufgabe 5)
3. Siehe *Stammbach*, Seite 203
4. $\log \pi - \log 2$ (Siehe *Stammbach*, Seite 182)
5. 3/2 (Siehe Analysis I, Serie 12, MC Aufgabe 1)
6. Für den Schwerpunkt bekommt man:
$$(x_s, y_s) = \left(-\frac{6}{\pi} + \frac{24}{\pi^3}, 2 - \frac{12}{\pi^2}\right)$$
(Siehe *Stammbach*, Seite 180)
7. Für den Schwerpunkt bekommt man:
$$(x_s, y_s, z_s) = \left(\frac{3D^2 + 2Dd + d^2}{4 \cdot (D^2 + Dd + d^2)} \cdot L, 0, 0\right)$$
(Siehe Analysis I, Serie 13, Aufgabe 6)

   Bemerkung. Die Aufgabe wurde mit Hilfe von den Formeln für Rotationskörper gelöst: Man kann sie auch lösen mit mehrdimensionalen Integrale (empfholen).
8. Mit $I_z = \iiint_v x^2 + y^2 \, dv$ bekommt man
$$I_z = \delta \int_0^{\beta} \int_0^{R \sin \alpha} \int_{z \cot \alpha}^{\sqrt{R^2 - z^2}} \rho^3 \, d\rho dz d\phi = \frac{\delta \beta R^5}{15} \cdot (3 \sin \alpha - \sin^3 \alpha)$$
9. $I_z = \frac{\pi H R^4}{12} \cdot (6 + 4R^2 + 3H)$ (Siehe Analysis II, Serie 5, MC Aufgabe 6)
10. Das Gebiet B ist
$$B = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}$$
Somit folgt
$$F(B) = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} dF = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} dy dx = \int_0^1 1 - x \, dx = \frac{1}{2}$$


11. Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 8

12. (a) Durch die Transformation $x = u \cdot \cos(v)$ und $y = 2u \cdot \sin(v)$ findet man

$$dF = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ 2\sin(v) & 2u\cos(v) \end{pmatrix} \right| dudv = 2u\,dudv$$

Die Fläche ist also

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2u\,dudv = 2\pi$$

(b) Mit der Formel von Analysis 1 erhält man

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - \dot{x}y)dt = \int_0^{2\pi} 2\cos^2(t) + 2\sin^2(t)\,dt = 2\pi$$

Mit dieser Formel kann man trotzdem nicht auf der Ellipse integrieren (z.B. Volumen unter einer Ebene auf der Ellipse).

13. $V = \frac{3\pi}{8}$ (Siehe Analysis II, Serie 4, Aufgabe 5)

8 Vektoranalysis

1.
$$\text{div}\vec{v}_1 = 0 \qquad \text{rot}\vec{v}_1 = (-2, 2, 2)$$
$$\text{div}\vec{v}_2 = 2yz \qquad \text{rot}\vec{v}_1 = (z^2 + x, 0, -z - 3)$$

2. Man bestimme die Gleichung der Figur, die bei der Rotation der Gerade, die durch den Richtungsvektor $(0, 1, 1)$ definiert ist, um die z-Achse entsteht.

   Die Gerade hat die Parameterdarstellung:
$$g_1 : u \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ u \end{pmatrix}$$

   Mit der Rotationsmatrix (um die z-Achse)
$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -\sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   erhält man die gesuchte Parametrisierung
$$\vec{r} : (u, v) \mapsto R_z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot \sin(v) \\ u \cdot \cos(v) \\ u \end{pmatrix}$$

   Die implizite Gleichung ist dann
$$x^2 + y^2 = u^2 = z^2$$

3. Der Kegel wird durch die Parametrisierung
$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(v) \\ u \cdot \sin(v) \\ u \end{pmatrix} \qquad v \in [0, 2\pi], u \in [0, 1]$$

   Daraus folgt
$$\vec{r}_u(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_v(u, v) = \begin{pmatrix} -u \cdot \sin(v) \\ u \cdot \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Somit kann man das Oberflächenelement berechnet werden
$$dA = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \left| \begin{pmatrix} -u \cdot \cos(v) \\ -u \cdot \sin(v) \\ u \end{pmatrix} \right| dudv = \sqrt{2} \cdot u \, dudv$$

   Das Oberflächenintegral wird somit
$$A = \iint_K \sqrt{2} \cdot u \, dudv = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 u \, dudv = \sqrt{2}\pi$$

4. $4\pi R^2$

5. Siehe Analysis II, Serie 5, Aufgabe 5
6. Siehe Analysis II, Serie 6, Aufgabe 9
7. Man berechne den Fluss von innen nach aussen des Vektorfeldes $\vec{v} = (x+2, y+1, z)$ durch die Halbkugel B mit Radius 1.

   Fluss durch die Halbkugel+Grundfläche:

   $$\Phi_1 = \iiint_B 3\,dV = 3 \cdot V(B) = 2\pi$$

   Fluss (von innen nach aussen) durch die Grundfläche (xy-Ebene, $z = 0$):

   $$\Phi_2 = \iint (x+2, y+1, 0) \cdot (0, 0, -1)\,dA = 0$$

   Der gesamte Fluss ist deshalb

   $$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 2\pi$$

8. $\pi/4 \cdot \sin^2 \vartheta$ (Siehe *Stammbach*, Seite 203)
9. (a) Mit $\mathrm{div}\vec{v} = 4y$ bekommt man (Kugelkoordinaten)

   $$\iiint \mathrm{div}\vec{v}\,dV = \frac{\pi}{4}$$

   (b) Der gesuchte Fluss ist

   $$\Phi_{\text{gekrümmt}} = \Phi_{\text{Köper}} - \Phi_{\text{Ebene}} = \frac{3\pi}{8}$$

10. 3 (Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 7)
11. $-1/2$ (Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 2)
12. $W = 1/2$ (Siehe Analysis II, Schnellübung 2, Aufgabe 4)
13. $\alpha \cdot \beta = 1/4$ (Siehe *Stammbach*, Seite 171)
14. Siehe Analysis II, Serie 9, Aufgabe 2
15. Da der Weg geschlossen ist, kann man den Satz von Stokes anwenden:

    $$W = \int_{\partial S} \vec{v}\,d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}\,dA$$

    Unter Berücksichtigung, dass die Arbeit in Gegenuhrzeigersinn gefragt ist:

    $$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 2x \end{pmatrix}$$

    Somit ist die Arbeit:

    $$W = \iint 2x\,dA = 2 \cdot A \cdot x_s = 0$$

    Hier wurde es angewendet, dass $x_s = \frac{1}{A} \iint x\,dA$ ($x_s = 0$ für den Einheitskreis, da Schwerpunkt und Ursprung übereinstimmen).

16. $a = \pm\sqrt{2/\pi}$ (Siehe *Stammbach*, Seite 206)

17. Die Gerade hat die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1+t\\1-t\end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

Somit ist die Arbeit

$$W = \int_0^1 \begin{pmatrix}\cdots\\1+t\\1-t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} dt = \int_0^1 1 + t - (1-t)\, dt = \int_0^1 2t\, dt = 1$$

Die Arbeit von $(1,2,0)$ nach $(1,1,1)$ ist -1 ($\vec{r}(t)$ ändert sich nicht, aber hat $t \in [1,0]$).

9 Komplexe Zahlen

1. (a) $\frac{32}{41} + \frac{i}{41}$
   (b) $-1/4$
   (c) $\sqrt{e}\cos(\sqrt{3}/2) - i\sqrt{e}\sin(\sqrt{3}/2)$

   Für den Lösungsweg: Siehe Analysis I, Zusätzliche komplexe Zahlen, Aufgabe 1

2. Siehe Analysis I, Zusätzliche komplexe Zahlen, Aufgabe 3

3. Die Nullstellen sind $1 \pm i, \pm 1$.
   Das Polynom kann als $(x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 - 1)$ geschrieben werden.

4. $z^2 + z + 1 = 0 \to z_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$
   In Polarkoordinaten: $z_1 = e^{i\cdot 2\pi/3}, z_2 = e^{-i\cdot 2\pi/3}$

5. (a) $-2^{50} + i2^{50}$ (Siehe Analysis I, Zusätzliche komplexe Zahlen, Aufgabe 4)
   (b) Siehe Analysis I, Zusätzliche komplexe Zahlen, Aufgabe 6a
   (c) Siehe Analysis I, Zusätzliche komplexe Zahlen, Aufgabe 6b

10 Differentialgleichungen

1. Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 3
2. Die Differentialgleichung ist separierbar und kann wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{x^2+1}$$

Integration (nach x) liefert:

$$\begin{aligned} \int \frac{y'}{y^2}\,dx &= -\int \frac{dx}{x^2+1} \\ \int \frac{dy}{y^2} &= -\int \frac{dx}{x^2+1} \\ -\frac{1}{y} &= -\arctan(x) + C' \end{aligned}$$

Die Gleichung kann nach y aufgelöst werden:

$$y(x) = \frac{1}{\arctan(x) + C} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Die Anfangsbedinung liefert $C = 1$, d.h. die Lösung der Anfangswertproblem lautet:

$$y(x) = \frac{1}{\arctan(x) + 1}$$

3. Wir betrachten zuerst die homogene DGL und wir machen einen Euler Ansatz

$$y_h(x) = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

Durche Einsetzen bekommen wir das charakteristiche Polynom

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot (\lambda^2 + 1) = 0$$

Die Nullstellen sind 0 und $\pm i$, somit ist die homogene Lösung

$$y_h(x) = C_1 + A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x)$$

Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $y_p(x) = A \cdot x + B$ und man bekommt

$$y_p(x) = x$$

Die allgemine Lösung ist somit

$$y(x) = C_1 + A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x) + x$$

4. Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 4
5. Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 5
6. Siehe *Stammbach*, Seite 199

7. Die DGL ist nicht separierbar, deshalb macht man die Substitution (gemäss Tabelle):

$$u(x) = x - y \quad \Leftrightarrow \quad y = x - u(x) \quad \Leftrightarrow \quad y' = 1 - u'(x)$$

   Einsetzen liefert:

$$1 - u' = u^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u} = x + C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{x + C}$$

   Durch Rücksubstitution findet man allgemeine Lösung

$$y = x - u = x - \frac{1}{x + C}$$

   Durch Einsetzen der Anfangsbedingung findet man $C = 0$, somit

$$y(x) = x - \frac{1}{x}$$

8. Die Differentialgleichung ist exakt: Man sieht, dass $\phi_y = \psi_x$. Die Funktion $g(x, y)$ lautet somit:

$$g(x, y) = x^3 \cdot y + y^2 + C'$$

   Die implizite Lösung der Differentialgleichung ist dann

$$C'' = x^3 \cdot y + y^2 + C' \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 \cdot y + y^2 = C$$

9. $y(x) = \frac{K}{x} + \frac{\sin(x^2)}{2x}$ (Siehe Analysis II, Serie 11, Aufgabe 2)
10. $y(x) = x$ (Siehe Analysis II, Serie 11, Aufgabe 4)
11. $y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x + 2x^2) \cdot e^{-x}$ (Siehe Analysis II, Serie 12, Aufgabe 1)
12. $y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{-4x} + \frac{1}{5}x \cdot e^x - \frac{6}{25}e^x$ (Siehe Analysis II, Serie 12, Aufgabe 1)
13. $y(x) = e^{-x} \cdot \cos(x) - 1$ (Siehe *Stammbach*, Seite 177)
14. Man finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\sin(x) \cdot y' + \cos(x) \cdot y = e^x$$

   Da die DGL linear ist, ist $y = y_h + y_p$:

   - homogene DGL:

$$\sin(x) \cdot y' + \cos(x) \cdot y = 0$$

     Diese Differentialgleichung ist separierbar:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \Longrightarrow \quad y_h = \frac{C'}{\sin(x)}$$

   - inhomogene DGL: Wir verwende das Verfahren von Lagrange und machen den Ansatz

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{\sin(x)} \quad \Longrightarrow \quad y_p'(x) = \frac{C'(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot C(x)}{\sin^2(x)}$$

     Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\frac{C'(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot C(x)}{\sin(x)} + \frac{\cos(x) \cdot C(x)}{\sin(x)} = e^x$$

Man sieht, dass die Terme mit $C(x)$ verschwinden (muss so sein). Deshalb bekommt man eine Gleichung für C'(x):

$$C'(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad C(x) = e^x + C''$$

Die partikuläre Lösung ist dann

$$y_p = \frac{C(x)}{\sin(x)} = \frac{e^x + C''}{\sin(x)}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C'}{\sin(x)} + \frac{C'' + e^x}{\sin(x)} = \frac{C + e^x}{\sin(x)}$$

15. $y(x) = \frac{1}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2$ (Euler'sche Differentialgleichung)

16. Siehe Analysis II, Serie 12, Aufgabe 6

17. $\sin x \cdot \sinh y = C$ (Siehe *Stammbach*, Seite 191)

18. $(y-1)^2 + (x-1)^2 = C$ (Siehe Analysis II, Serie 11, Aufgabe 6)

19. Zuerst muss man die gegebene Kurvenschar mit einer Differentialgleichung beschreiben (Elimination von c). Ableiten ergibt:

$$y' \cdot (x-1) + y + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = -y - y' \cdot (x-1)$$

Einsetzen in die Kurvenschargleichung ergibt:

$$y' \cdot (x^2 - x) + y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x - x^2} = f(x,y)$$

Die Orthogonaltrajektorien sind dann gegeben durch

$$y'_{OT} = -\frac{1}{f(x,y)} = \frac{x^2 - x}{y}$$

Die Orthogonaltrajektorien sind die Lösung der DGL (separierbar) und lauten:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{2}{3} \cdot x^3 - x^2 + C}$$

11 Differentialgleichungsysteme

1. Das Phasenportrait ist gegeben durch
$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-x}{y-1} \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 + x^2 = C$$
Der GGW Punkt ist $(0,1)$ (wegen $\dot{x} = \dot{y} = 0$).
2. $y = C \cdot x \cdot e^{-x}$ (Siehe *Stammbach*, Seite 193)
3. Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 10
4. Die gesuchte Funktionen sind
$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{5t} - 2e^{-t} \\ y(t) &= 2e^{5t} + e^{-t} \end{aligned}$$
(Siehe *Stammbach*, Seite 197)
5. Zuerst schreiben wir Differentialgleichungssystem in Matrix Form
$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot z \qquad z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$
Jetzt versuchen wir, das System zu entkoppeln:
   (a) EW: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$
   EV: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$
   (b) Wir machen die Tranformation
$$z = T \cdot u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot u \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot u$$
   (c) Die Lösung u ist also
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cdot e^t \\ C_2 \cdot e^{2\cdot t} \end{pmatrix}$$
   (d) Durch Rücksubstitution findet man
$$z = T \cdot u = C_1 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{2\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
6. Die gesuchte Lösung lautet
$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{2}{15}e^{-4t} - \frac{1}{24}e^{-7t} + \frac{7}{40}e^t \\ y(t) &= -\frac{1}{15}e^{-4t} + \frac{1}{24}e^{-7t} + \frac{1}{40}e^t \end{aligned}$$
(Siehe *Stammbach*, Seite 181)
7. Wir versuchen, das System zwei eine DGL zweiter Ordnung umzuwandeln:
   (a) Durch Ableiten der ersten Gleichung findet man
$$\ddot{x} = \dot{x} - \dot{y} + e^t \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = -\ddot{x} + \dot{x} + e^t$$
   Einsetzen dieser Ableitung und der ersten Gleichung in die zweite liefert
$$\underbrace{-\ddot{x} + \dot{x} + e^t}_{\dot{y}} = x + \underbrace{(-\dot{x} + x + e^t)}_{y} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$$

(b) Die Gleichung besitzt die Lösung

$$x(t) = e^t \cdot (A \cdot \cos(t) + B \cdot \sin(t))$$

Die Anfangsbedindingung $x(0) = 0$ liefert $A = 0$.

(c) Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\begin{aligned} y(t) &= -\dot{x} + x + e^t \\ &= -B \cdot (e^t \cdot \sin(t) + \cos(t) \cdot e^t) + B \cdot e^t \cdot \sin(t) + e^t \\ &= e^t \cdot (-B \cdot \cos(t) + 1) \end{aligned}$$

(d) Die zweite Anfangsbedingung liefert $B = 1$.

Die Lösung des Differentialgleichungssystems lautet somit

$$x(t) = e^t \cdot \sin(t) \qquad y(t) = e^t \cdot (1 - \cos(t))$$

12 Potenzreihen

1. (a) $(-1/2, 1/2)$
   (b) $(1-e, 1+e)$
2. Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 7
3. Wir wissen, dass
$$\operatorname{arctanh}(x) + C = \int \frac{dx}{1-x^2}$$
Mit Hilfe der geometrischen Reihe:
$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \qquad \text{für } |x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$
Somit ist
$$\operatorname{arctanh}(x) + C = \int \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
Wegen $\operatorname{arctanh}(0) = 0$ ist $C = 0$ und folgt
$$\operatorname{arctanh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$
Der Konvergenzradius der Folge ist $\rho = 1$ (aus der geometrischen Reihe).
4. Mit Partialbruchzerlegung bekommt man
$$\frac{x-1}{(x^2+1)\cdot(x+1)} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}$$
Mit Hilfe der geometrischen Reihe:
$$\frac{x}{1+x^2} = x \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n+1}$$
$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$
Somit ist
$$\frac{x-1}{(x^2+1)\cdot(x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x^{2n+1} - x^n)$$
Für den Konvergenzbereich gilt:
   - $|-x^2| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{1} = 1$
   - $|-x| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1$

   Daraus folgt, dass die Potenzreihe für $x \in [-1, 1]$ konvergiert ($\rho = 1$).
5. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{48} + \dots$ (siehe *Stammbach*, Seite 200)

6. $x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \ldots$ (siehe *Stammbach*, Seite 209)
7. Mit
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
bekommt man
$$\sin(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!}$$
8. $y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{120} + \ldots$ (Siehe Analysis II, Serie 13, Aufgabe 6)
9. $y(x) = 1 + x - \frac{x^5}{60} + \ldots$