

Übersicht Hohlleiter

- **Vergleich: freie Wellen vs. Leitungswellen**
- **Ebene Welle im rechteckigen Hohlleiter**
- **"Geführte Wellenlänge"**
- **Übertragung von Signalen**
- **Moden**
- **Mathematische Herleitung (Rechteck)**
- **Aufteilung der Wellenzahl: Cutoff**
- **Rundhohlleiter**
- **Besselfunktionen**

Wellenausbreitung

Allgemeine Bemerkungen

Freie Wellen: Ebene Welle

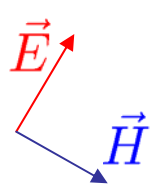
Lösung der Maxwell'schen Gleichungen

Leitungswellen: "Drahtwellen", (Quasi-)TEM-Wellen

Lösung der Leitungs-Gleichungen

Vergleich

Freie Wellen



$$\frac{\vec{E} \cdot \vec{E}}{\vec{H} \cdot \vec{H}} = Z_w^2 = \frac{\mu}{\epsilon}$$

Wellenimpedanz
Nur Material

Leitungswellen

$$\frac{U}{I} = Z_0 = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}}$$

Feldtheorie

Charakteristische Impedanz
Geometrie und Material

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\gamma = \sqrt{Y' \cdot Z'}$$

$$\gamma = j\omega \sqrt{C' \cdot L'}$$

$$-j\gamma \hat{=} k$$

$$\underline{E}(z) = \underline{E}_0^\pm \cdot e^{\mp jkz}$$

$$\underline{H}(z) = \pm \frac{\underline{E}_0^\pm}{Z_w} \cdot e^{\mp jkz}$$

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_0^\pm \cdot e^{\mp \gamma z}$$

$$\underline{I}(z) = \pm \frac{\underline{U}_0^\pm}{Z_0} \cdot e^{\mp \gamma z}$$

Frage: Warum bleibt das Feld der Leitungswellen bei den Drähten?
(**keine** Abstrahlung)

Antworten:

1. Dies ist eine Suggestivfrage.
2. Praktisch jede Leitung strahlt (ein bisschen).
3. Mathematische Antwort:

Eigenwert-Problem mit **unbekanntem** EW

4. Falls TEM, dann nur ein EW!

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\gamma_{\text{TEM}} = -jk$$

Wann existieren TEM-Wellen?

1. Zylindrische, unendlich lange Struktur.
2. Mindestens zwei ideale, voneinander isolierte Leiter.
3. Dazwischen nur ein einziges Dielektrikum.
4. Achtung: Es gibt immer auch höhere Moden.

5. Für TEM-Moden gelten:

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = Z_w = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

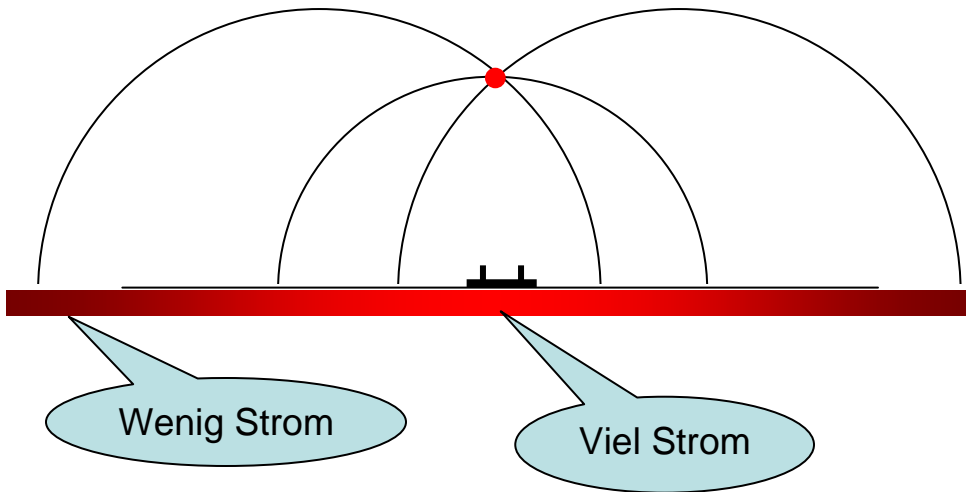
Transversales E-Feld wie in der Statik.

$$\vec{E} \perp \vec{H}$$

Beispiel: Kurvenreiche Eisenbahn



Wo fließt der Strom zurück?



$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = Z_w = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Transversales E-Feld wie in der Statik.

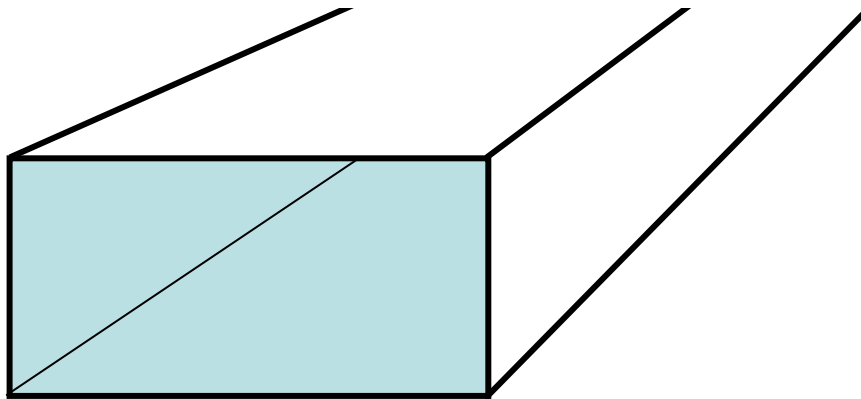
$$\vec{E} \perp \vec{H}$$

Felder & Komponenten II

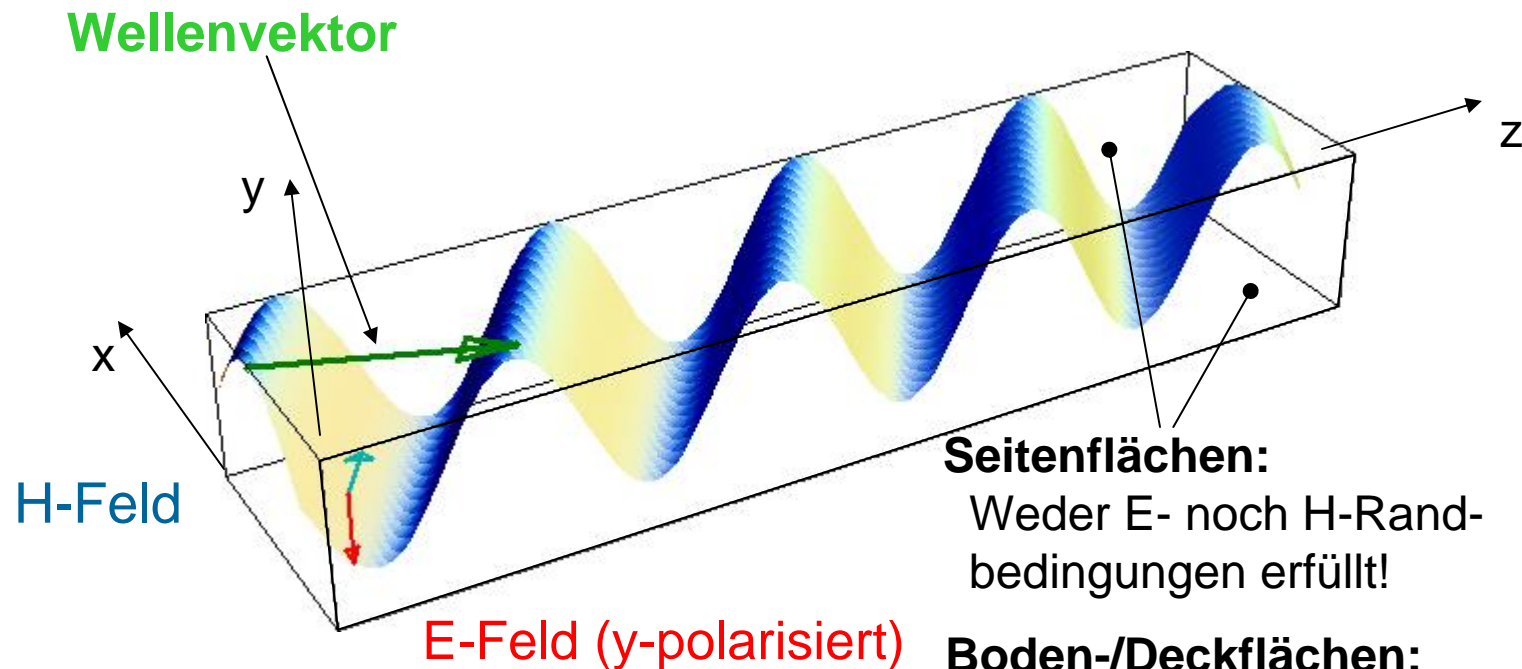
Hohlleiter

Es geht darum, elektromagnetische Wellen durch ein Rohr zu schicken

Wie sieht das EM-Feld aus, wenn es sich durch ein (leitendes) Rohr zwängt?



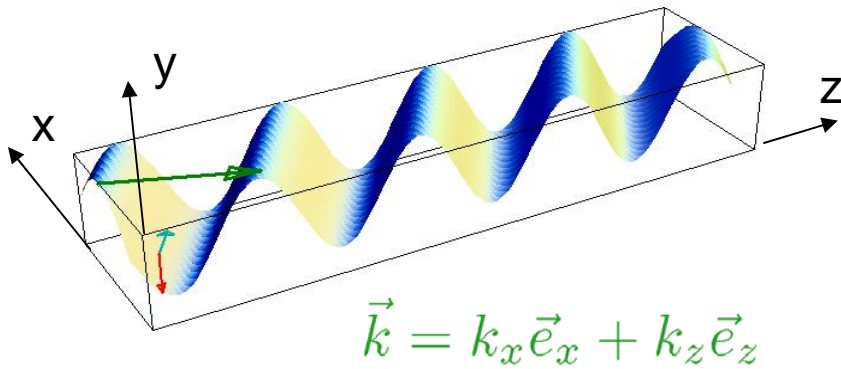
Ebene Welle im Hohlleiter



Feld unabhängig von y

Felder & Komponenten II

Ebene Welle im Hohlleiter



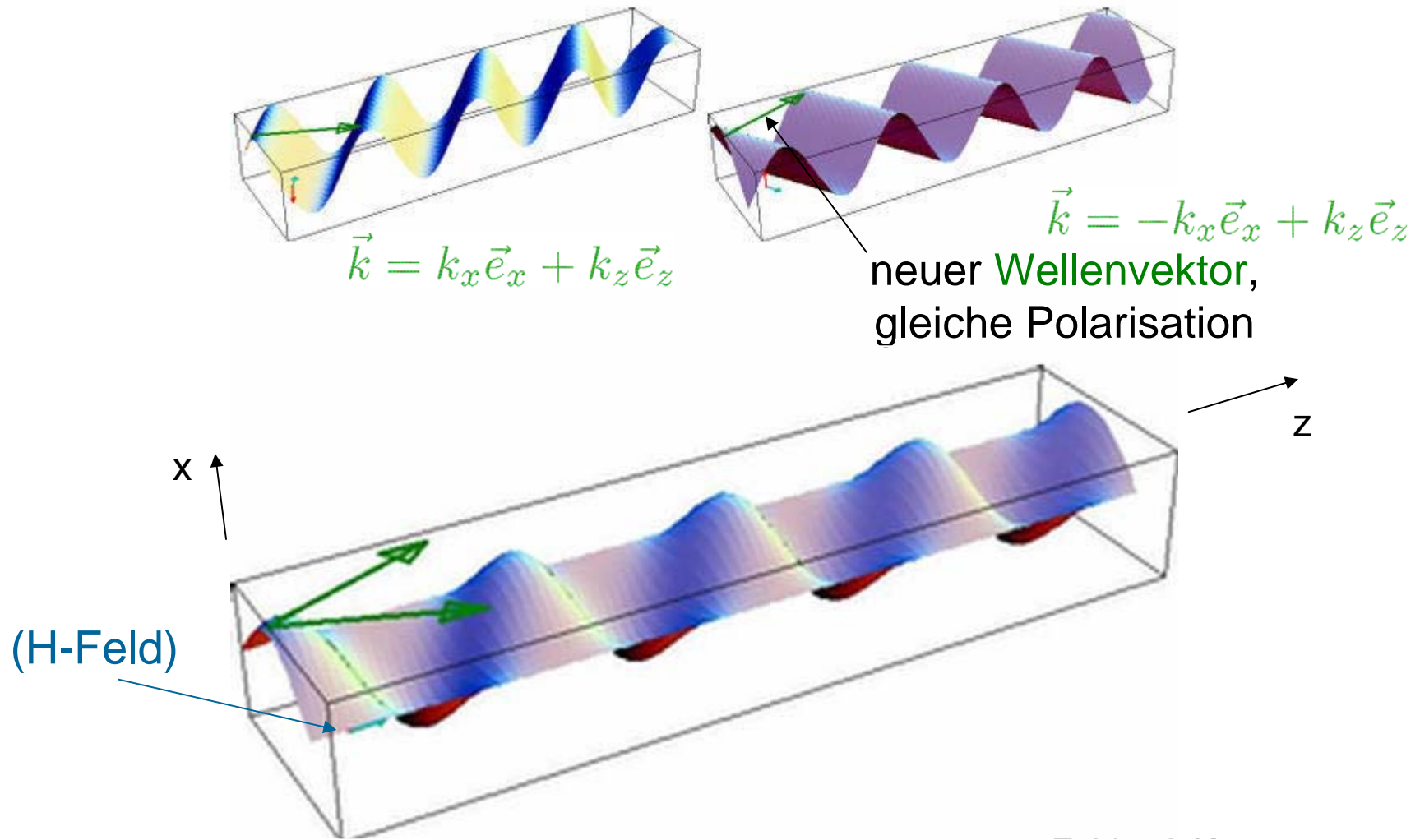
$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= (\underline{E}_0 \vec{e}_y) e^{-jk_x x - jk_z z} \\ \underline{\vec{H}} &= \frac{1}{\omega \mu} (\vec{k} \times \underline{\vec{E}}) \\ &= (\underline{H}_{0x} \vec{e}_x + \underline{H}_{0z} \vec{e}_z) e^{-jk_x x - jk_z z} \end{aligned}$$

Randbedingungen $\underline{\vec{E}}_{\text{tang}} \stackrel{!}{=} \underline{\vec{0}}; \underline{H}_{\text{norm}} \stackrel{!}{=} \underline{\vec{0}}$

Boden-/Deckflächen: $\underline{\vec{E}}_{\text{tang}} = \underline{E}_x \vec{e}_x + \underline{E}_z \vec{e}_z; \underline{H}_{\text{norm}} = \underline{H}_y$

Seitenflächen: $\underline{\vec{E}}_{\text{tang}} = \underline{E}_y \vec{e}_y + \underline{E}_z \vec{e}_z; \underline{H}_{\text{norm}} = \underline{H}_x$

Superposition von zwei Wellen (E-Feld)



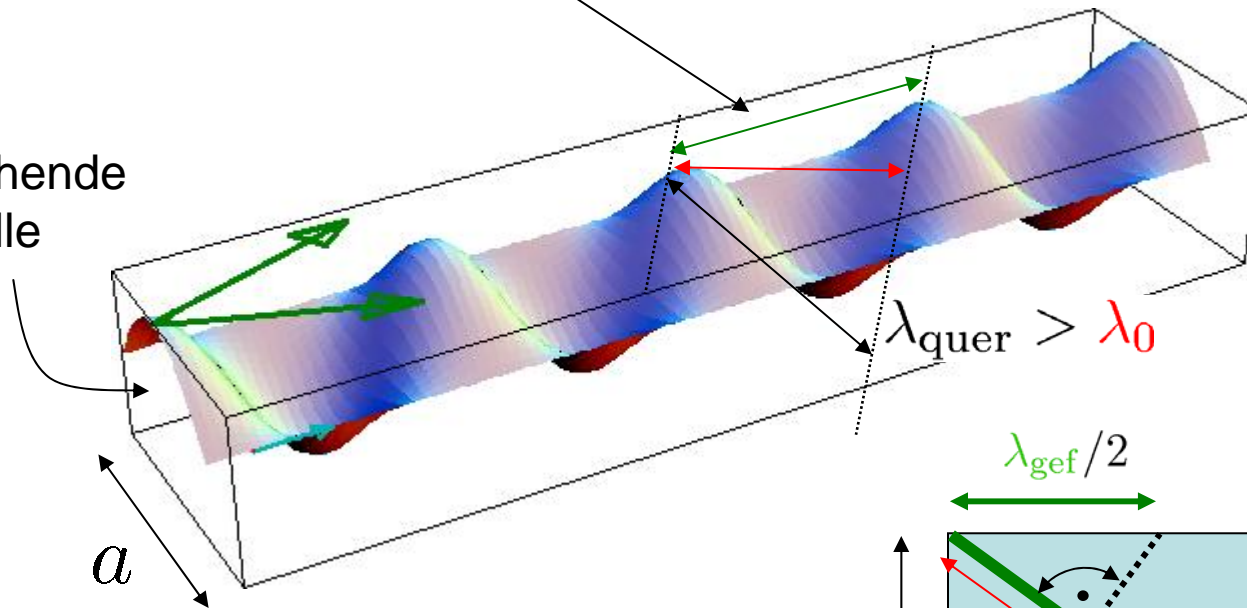
Projizierte "Wellenlängen"

Geführte Wellenlänge

$$\lambda_{\text{gef}} = \frac{2\pi}{\beta} > \lambda_0 = \frac{c}{f}$$

$$v_{\text{Phase}} = \lambda_{\text{gef}} f$$

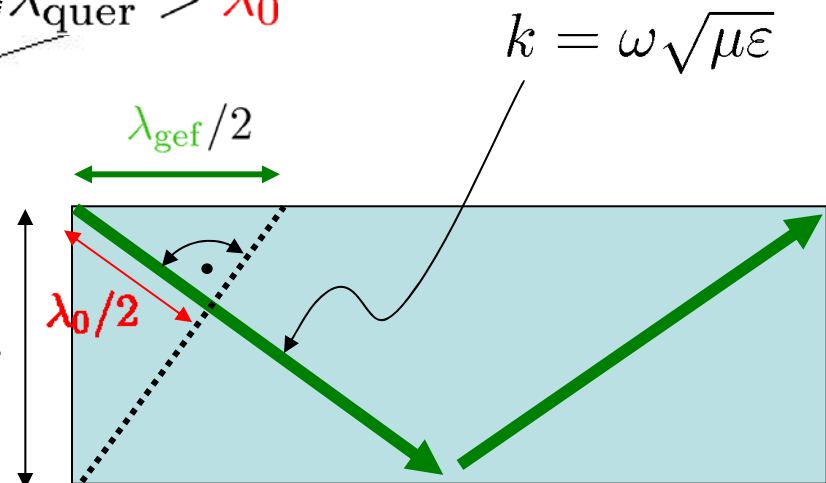
Stehende Welle



$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - (\pi/a)^2}$$

Ausbreitungskonstante

$$\lambda_0/2 < a$$



von oben

Felder & Komponenten II

Geschwindigkeiten

$$\lambda_{\text{gef}} = \frac{2\pi}{\beta} > \lambda_0 = \frac{c}{f}$$

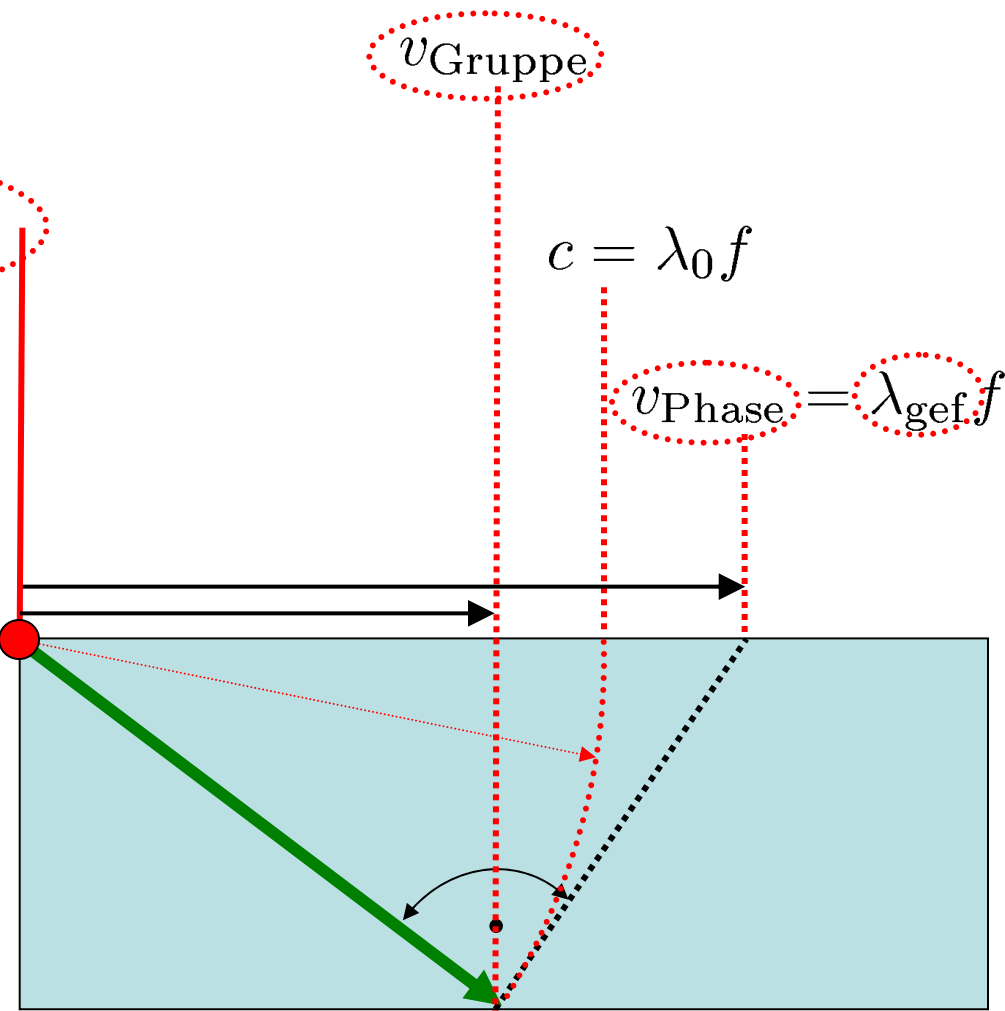
$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - (\pi/a)^2}$$

frequenzabhängig

Photon

Kathetensatz von Euklid:

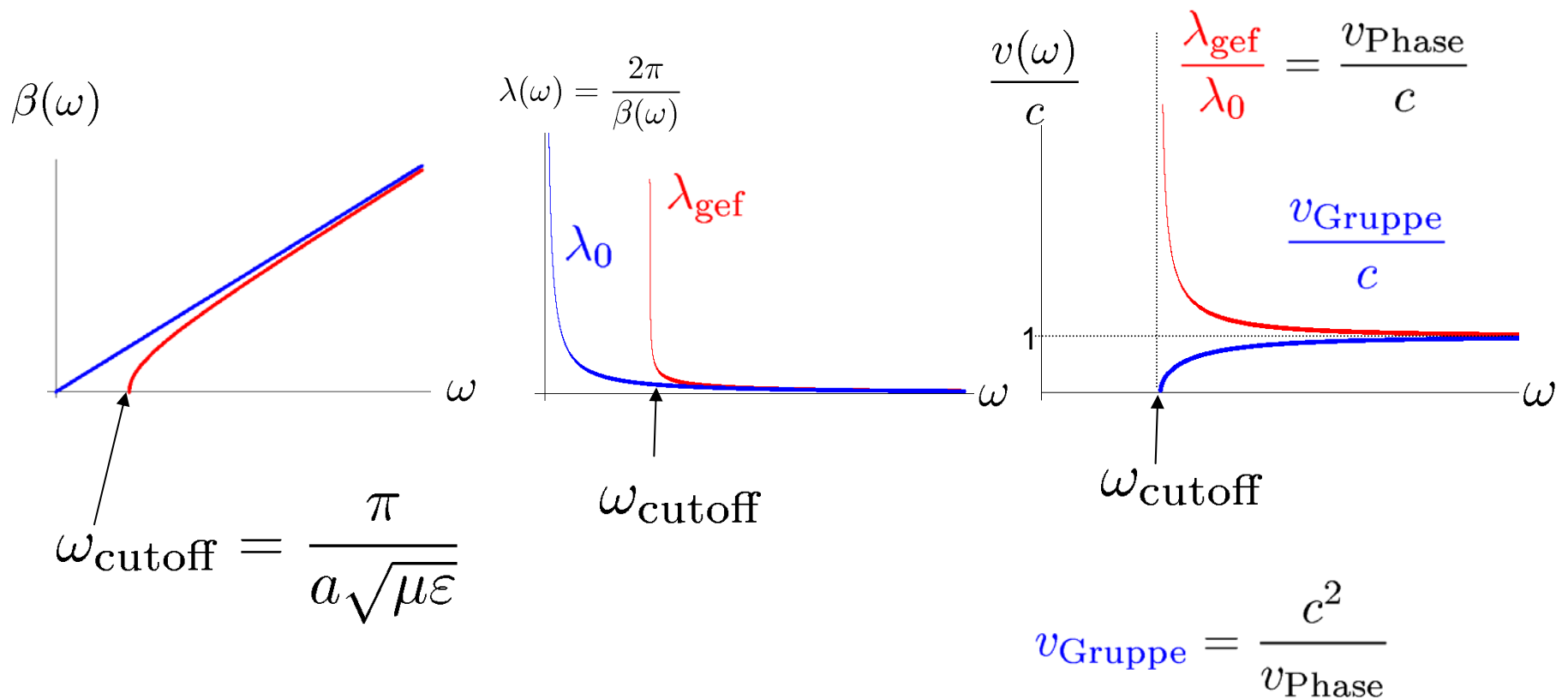
$$v_{\text{Gruppe}} \cdot v_{\text{Phase}} = c^2$$



Frequenzabhängigkeiten

$$\beta_0(\omega) = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\beta(\omega) = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - (\pi/a)^2}$$



Übertragung von Signalen:

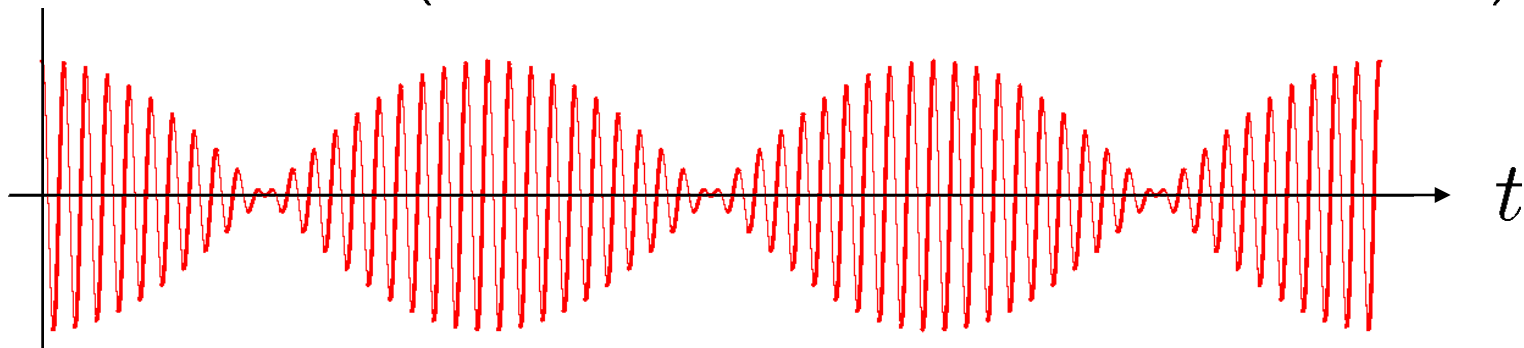
immer mehrere Frequenzen

Trägerfrequenz ω_A

Signalfrequenz ω_B

$$\Rightarrow E(0, t) = \underbrace{[E_0 \cos \omega_B t]}_{\text{Amplitude}} \cdot \cos \omega_A t$$

$$E(0, t) = \frac{E_0}{2} \left(\underbrace{\cos[(\omega_A - \omega_B) t]}_{\omega_1} + \underbrace{\cos[(\omega_A + \omega_B) t]}_{\omega_2} \right)$$



Felder & Komponenten II

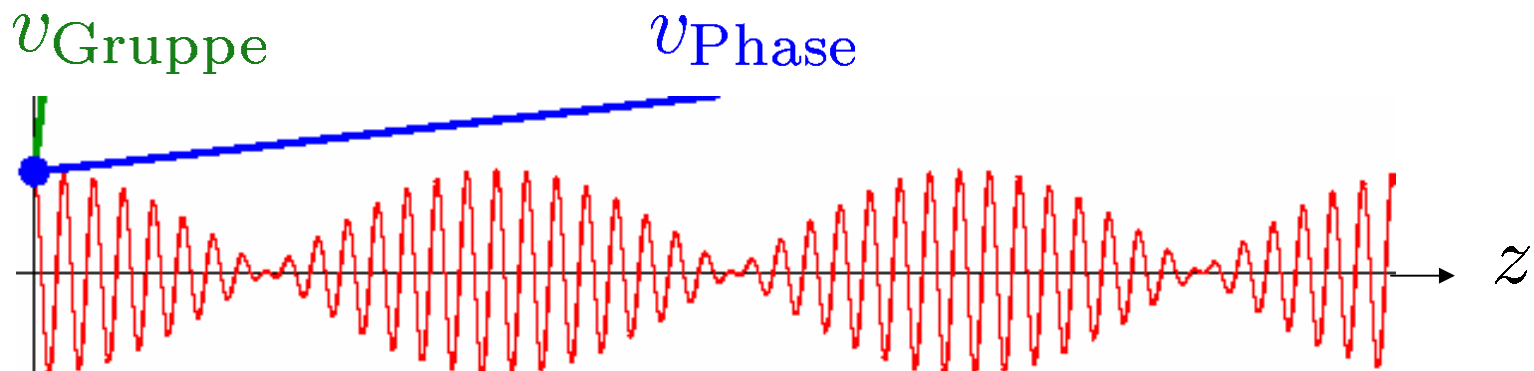
Übertragung von Signalen (2)

$$\omega_A \gg \omega_B \quad \beta = \beta(\omega) = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - (\pi/a)^2}$$

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

Ausbreitung frequenzabhängig!

$$E(z, t) = \frac{E_0}{2} (\cos[\omega_1 t - \beta_1 z] + \cos[\omega_2 t - \beta_2 z])$$

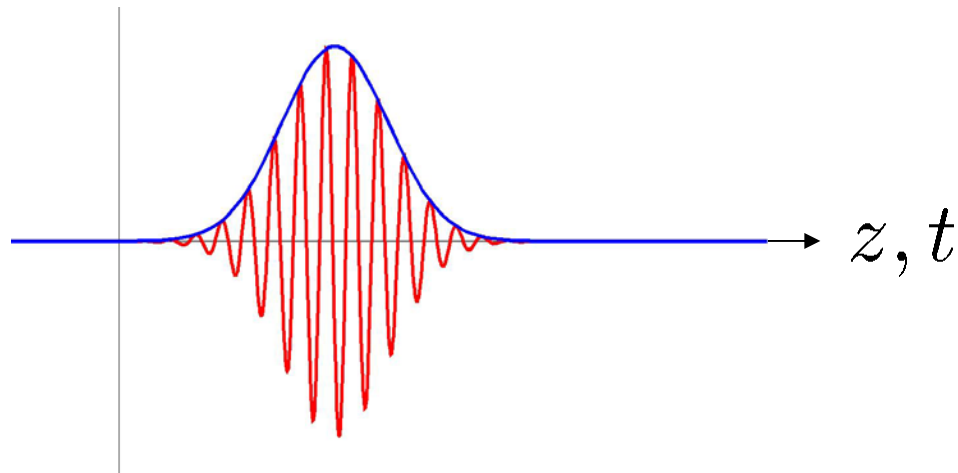


Gruppengeschwindigkeit = Signalgeschwindigkeit

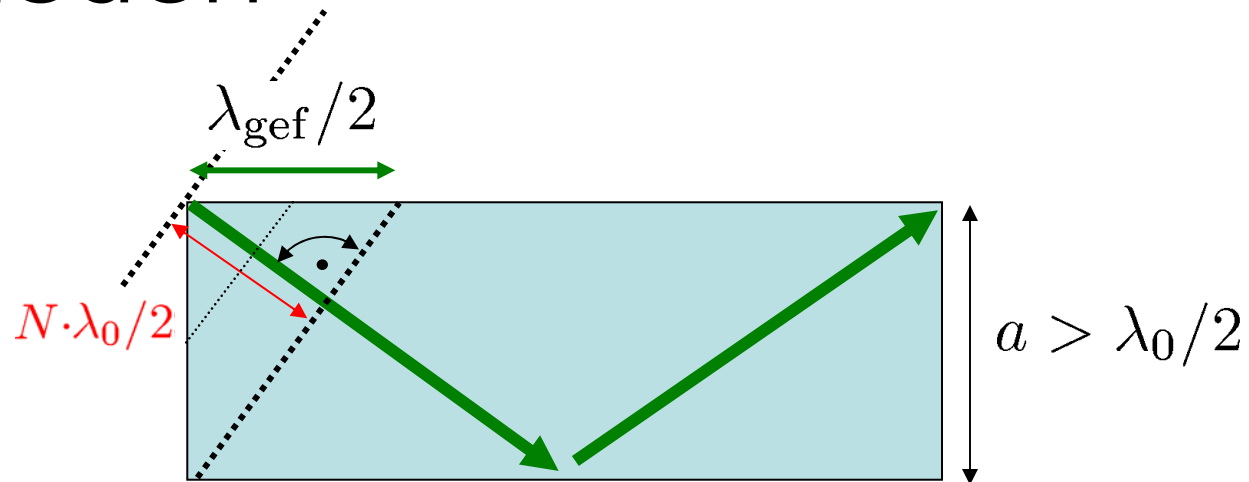
Puls ist Überlagerung mehrerer Frequenzen

Gruppe breitet sich aus wie ein einzelner Sinusbuckel

Phase wandert im Puls nach vorne



Moden



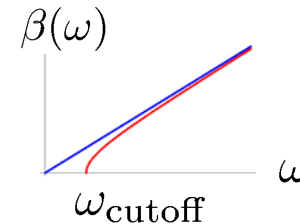
- $\lambda_0 / 2 > a$: kein Mode möglich
- $\lambda_0 / 2 < a$: ein Mode möglich
- $2 \cdot \lambda_0 / 2 < a$: zwei Moden möglich
- ⋮



Frequenz nimmt zu

Allg. Bemerkungen zu Moden

Moden nur ab minimaler Frequenz möglich



Grenzfrequenz für einen Mode heisst **Cutoff-Frequenz**

Verschiedene Moden haben unterschiedliches Feldbild im Querschnitt
(z.B. mehr Nullstellen)

Verschiedene Moden haben unterschiedliche Ausbreitungskonstanten

Signale haben immer mehrere Frequenzen \Rightarrow **Dispersion unvermeidbar**

Mathematische Herleitung der Moden

$$\Delta \vec{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\Delta \vec{H} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Vektorielle Wellengleichung

$$\Delta \vec{v} := (\Delta v_x) \vec{e}_x + (\Delta v_y) \vec{e}_y + (\Delta v_z) \vec{e}_z$$

$$\Delta E_x = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

⋮

plus 5 formal identische Gleichungen

Skalare Wellengleichung

$$\Delta \underline{E}_z = -\omega^2 \mu \varepsilon \underline{E}_z$$

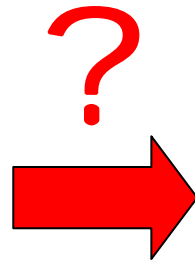
⋮

Felder & Komponenten II

Entkopplung

$$\Delta \underline{E}_z = -\omega^2 \mu \varepsilon \underline{E}_z$$

$$\underline{E}_z = \underline{E}_z(x, y, z)$$



**Gleichungen für
Funktionen mit
nur einer **Variable****

**Partielle
Differential-
Gleichung**



**Gewöhnliche
Differential-
Gleichung**

Mathematische Herleitung der Moden

Maxwell-Gleichungen $\Rightarrow (\Delta + \omega^2 \mu \epsilon) \underline{F}(x, y, z) = \underline{0}$



3D-Ansatz:

$$\underline{F}(x, y, z) = \underbrace{\underline{f}(x, y)}_{\text{2D}} \cdot \underbrace{e^{-j\beta z}}_{\text{Längs-Ausbreitung}}$$

Längs-Ausbreitung



2D-Helmholtz-Gleichung
in der Querschnittsebene

$$(\Delta + k_c^2) \underline{f}(x, y) = \underline{0}$$

$$k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$$

Mathematische Herleitung der Moden (2)

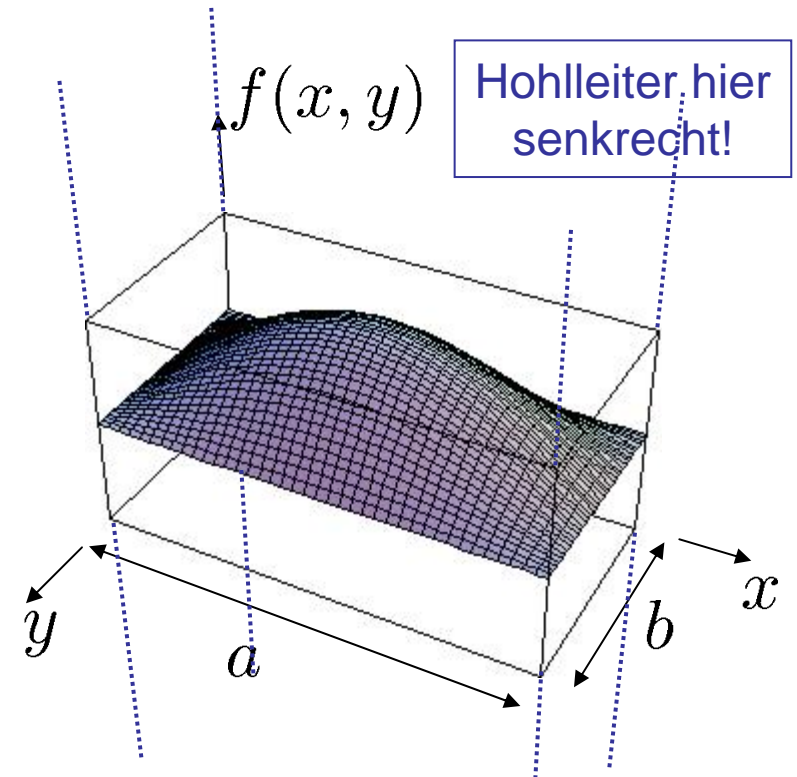
$$(\Delta + k_c^2) \underline{f}(x, y) = \underline{0}$$

$$k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$$

Schwingungsgleichung
(Analogie: eingespannte Membran)

$$\underline{f} \rightarrow \underline{E}_z(x, y) e^{-j\beta z}$$

oder $\underline{f} \rightarrow \underline{H}_z(x, y) e^{-j\beta z}$



Felder & Komponenten II

Mathematische Herleitung der Moden (3)

Schwingungsgleichung liefert nur z-Komponente!

Einsetzen in Maxwell-Gleichungen \Rightarrow alle Komp.

Hohlleiterwelle relativ kompliziert, wenn alle Komponenten betrachtet werden.

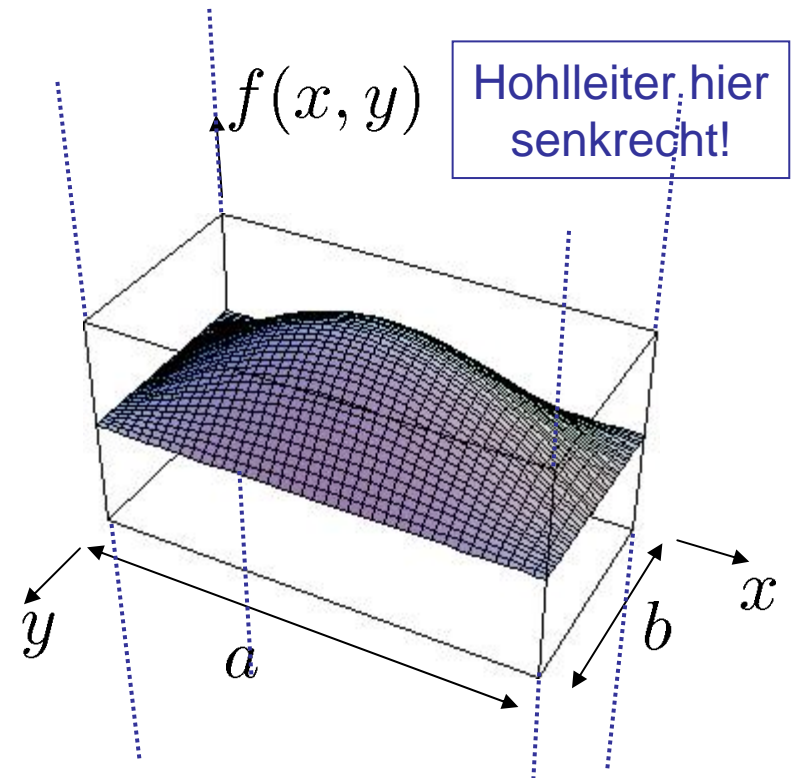
Zur **Charakterisierung** nur einzelne Komponenten.

Nur \underline{E}_x bei Ebener Welle!

$$\vec{H} = \frac{\underline{E}_x}{Z_w} \vec{e}_y$$

Hier: Nur $\underline{E}_z | \underline{H}_z$

$$\underline{E}_x, \underline{E}_y, \underline{H}_x, \underline{H}_y$$



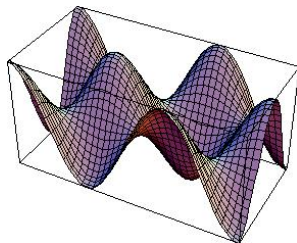
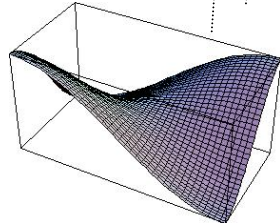
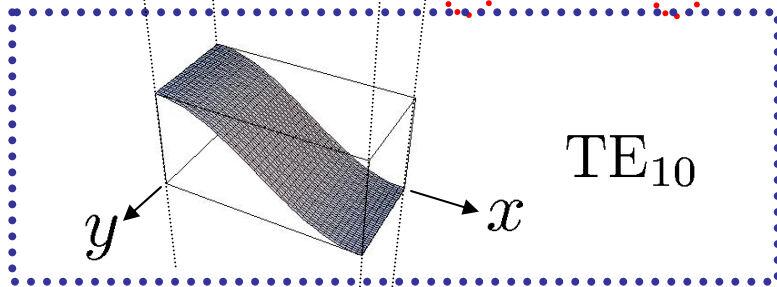
Felder & Komponenten II

2 Typen von Randbedingungen

H-Wellen (TE)

$$f \hat{=} H_z; \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0$$

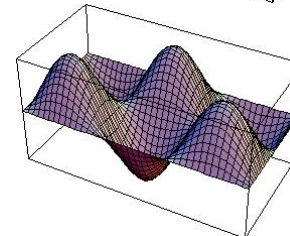
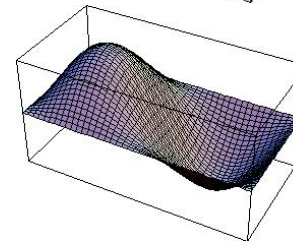
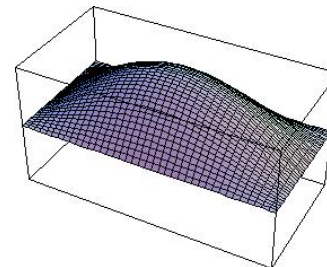
$$\Rightarrow f \sim \cos k_x x \cdot \cos k_y y$$



E-Wellen (TM)

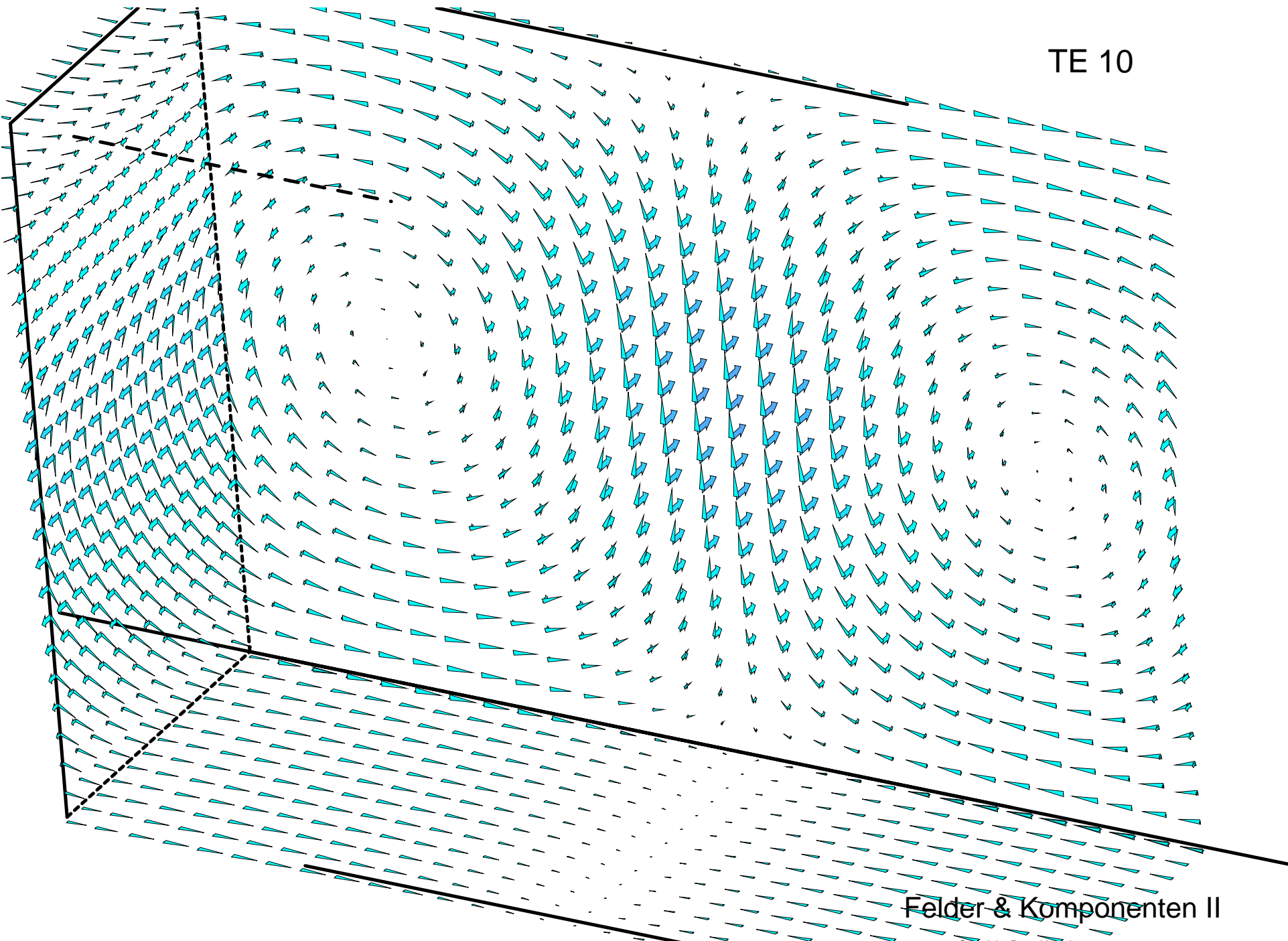
$$f \hat{=} E_z; \quad f = 0$$

$$\Rightarrow f \sim \sin k_x x \cdot \sin k_y y$$



Felder & Komponenten II

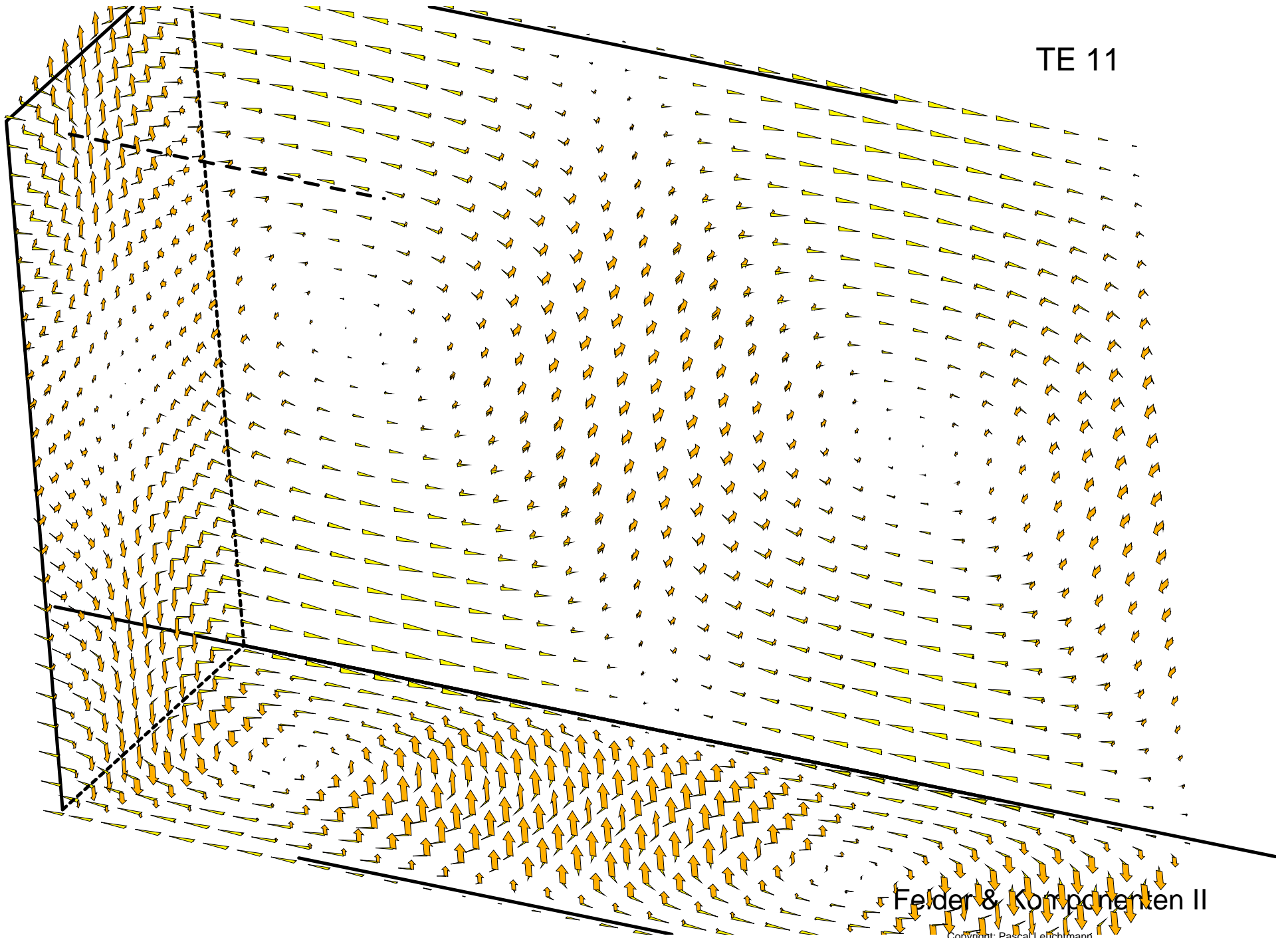
TE 10



Felder & Komponenten II

Copyright: Pascal Leuchtman

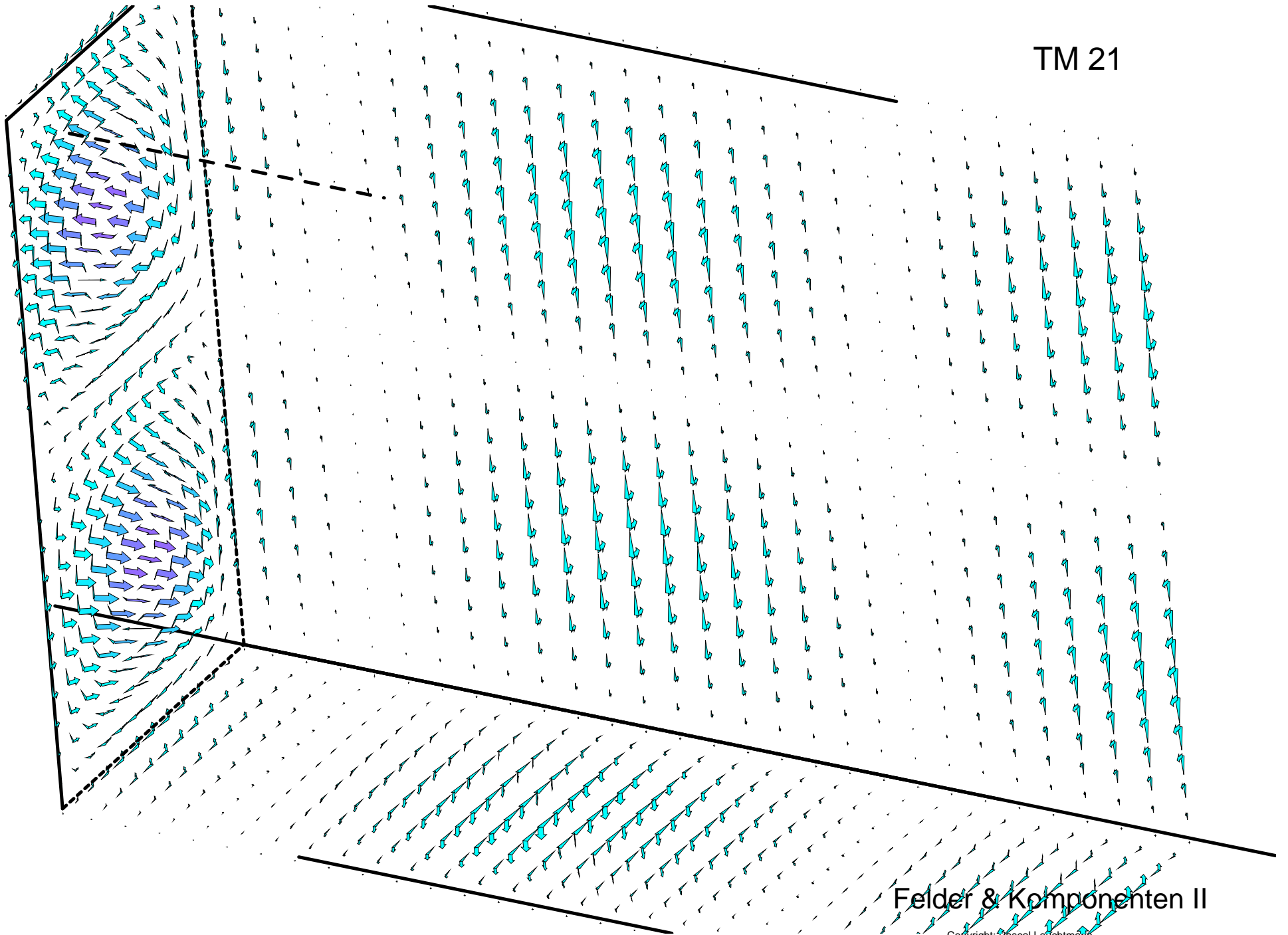
TE 11



Felder & Komponenten II

Copyright: Pascal Leuchtmann

TM 21



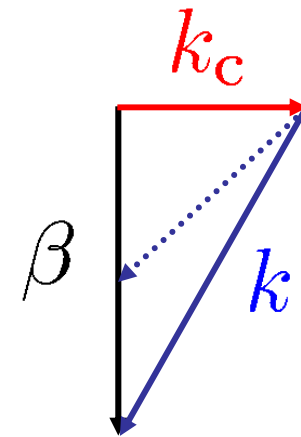
Felder & Komponenten II

Copyright: Pascal Leuchtmann

“Aufteilung” der Wellenzahl k

$$(\Delta + k_c^2) \underline{f}(x, y) = \underline{0}$$

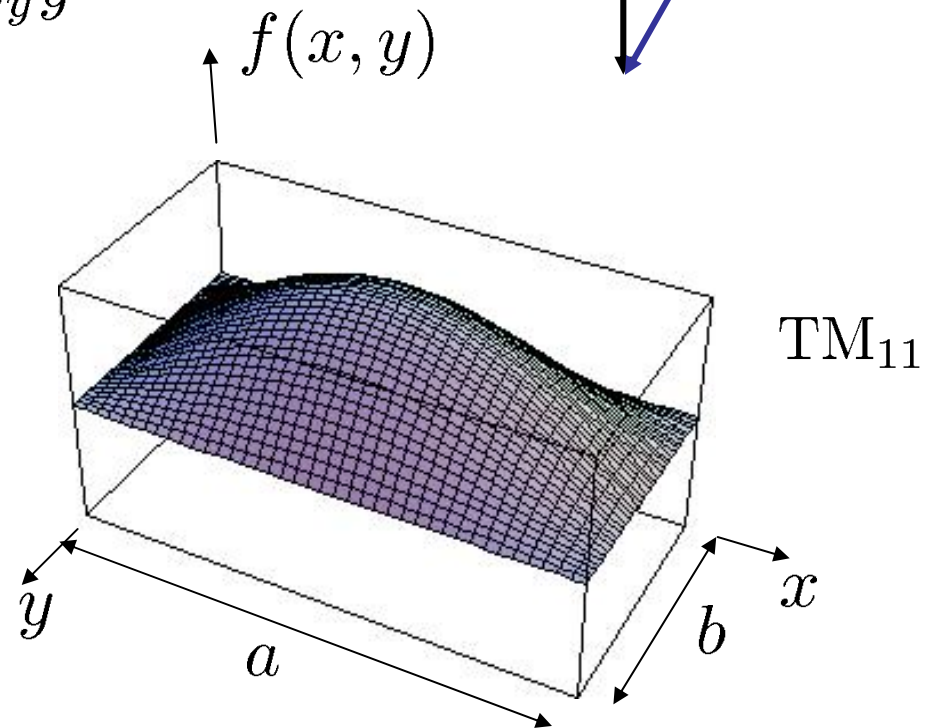
$$\underline{f} \sim \sin k_x x \cdot \sin k_y y$$



$$k_c^2 = \underbrace{\omega^2 \mu \epsilon}_{k^2} - \cancel{\beta^2} = k_x^2 + k_y^2$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \quad k_y = \frac{m\pi}{b}$$

auflösen nach ω



Felder & Komponenten II

Cutoff - Bedingung: $\beta = 0$

$$\Rightarrow \omega_{\text{cutoff},mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \begin{array}{l} \text{TE: } n \text{ oder } m = 0 \text{ möglich} \\ \text{TM: } n \text{ und } m > 0 \end{array}$$

kleinste Cutoff-Frequenz:

$$a \geq b \quad \omega_{c,\min} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{1}{a}$$

TE₁₀

$$k_c^2 = \underbrace{\omega^2 \mu\varepsilon}_{k^2} - \cancel{\beta^2} \quad \downarrow \quad 0$$

nächste Cutoff-Frequenz abhängig von a/b

$$(m, n) \stackrel{?}{=} \begin{cases} (0, 1) \\ (2, 0) \end{cases}$$

$$\sim \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2}$$

$$a/b = 2$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a}$$

$$k_y = \frac{m\pi}{b}$$

Felder & Komponenten II

Subcutoff: $\beta \rightarrow$ imaginär

$$k_c^2 = \underbrace{\omega^2 \mu \epsilon}_{k^2} - \beta^2 \quad \hookrightarrow \quad \beta = \pm \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_c^2}$$

Wegen Randbedingungen: $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$

$$e^{-j\beta z} \rightarrow e^{\pm \alpha z}$$

Dämpfung!!

Rechteckige Hohlleiter

- Monomode-Bandbreite ist höchstens $2 : 1 = 2$

- Verluste nahe bei Cutoff gross:

Praktische Monomode-Bandbreite ca. $2 : 1.2 = 1.67$

- Praktische Hohlleiter sind normiert und haben $a : b = 2$

- Anregung der Moden mit speziellen Übergangsgliedern

- $$\sum_m \sum_n \left(\underline{a}_{nm} F_{nm}^{\text{TE}} + \underline{b}_{nm} F_{nm}^{\text{TM}} \right) = \text{beliebiges Feld}$$

Maxwell - Mathematik - Moden

$$\underline{\vec{F}}(\vec{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\vec{E}}(\vec{r}) \\ \underline{\vec{H}}(\vec{r}) \end{array} \right\}$$

transversaler Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_T + z\vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{F}}(\vec{r}) = \underline{\vec{f}}(\vec{r}_T) \cdot e^{-j\beta z}$$

TM-Moden

TE-Moden

$$k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$$

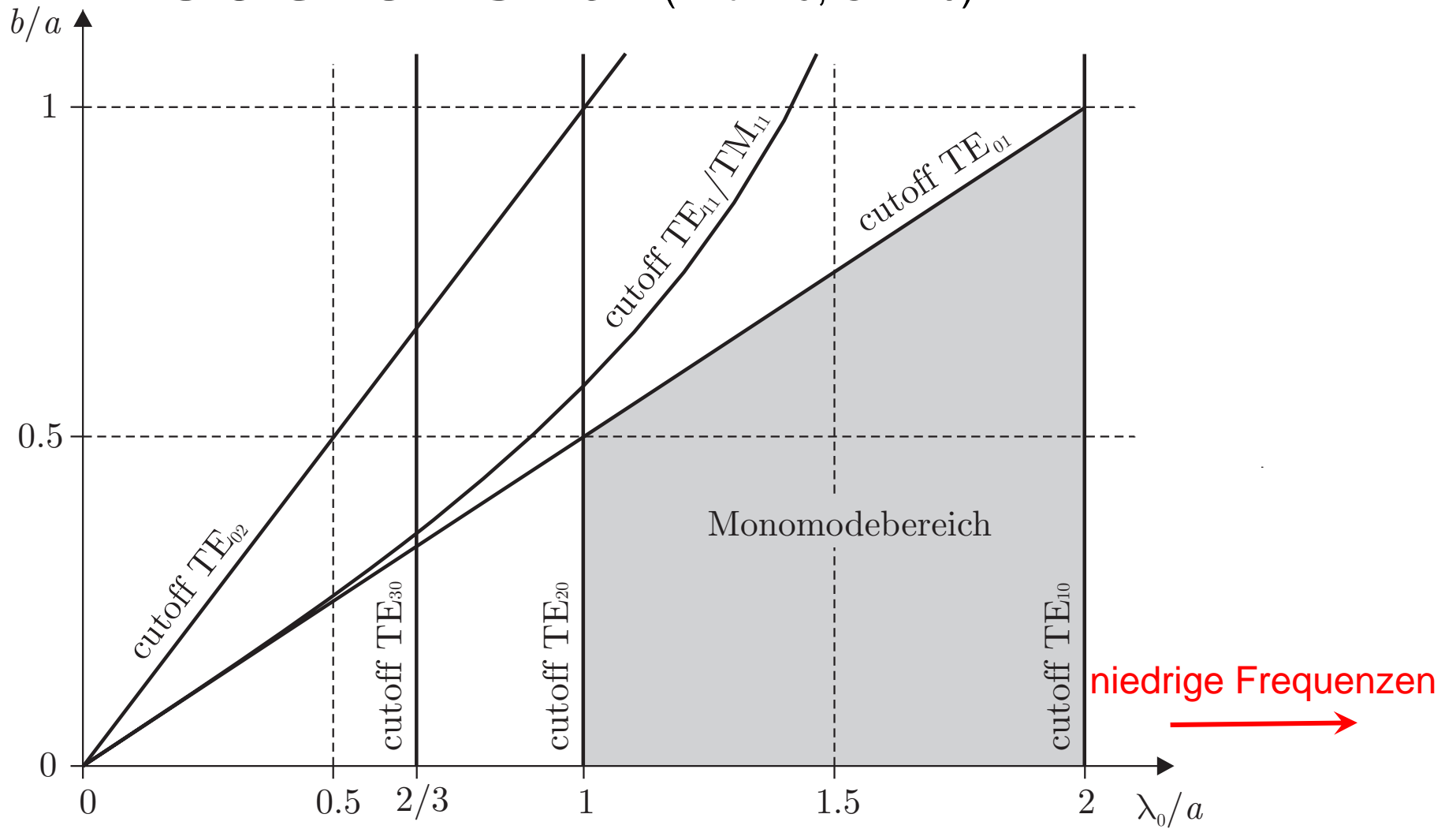
$$\underline{f}(\vec{r}_T) = \underline{E}_z(\vec{r}_T) \quad \text{oder} \quad \underline{H}_z(\vec{r}_T)$$

Skalare 2D-Helmholtz-Gleichung
mit Eigenwerten k_c

$$(\Delta + k_c^2) \underline{f}(\vec{r}_T) = \underline{0}$$

Rechteck: $k_c = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$

Mode Chart (Bild 4.9, S. 140)



Mathematische Herleitung der Moden: **Rundhohlleiter**

Maxwell-Gleichungen $\Rightarrow (\Delta + \omega^2 \mu \epsilon) \underline{F}(\rho, \phi, z) = \underline{0}$



3D-Ansatz: $\underline{F}(\rho, \phi, z) = \underbrace{\underline{f}(\rho, \phi)}_{\text{2D-Helmholtz-Gleichung}} \cdot \underbrace{e^{-j\beta z}}_{\text{Längs-Ausbreitung}}$

Längs-Ausbreitung



2D-Helmholtz-Gleichung
in der Querschnittsebene

$$(\Delta + k_c^2) \underline{f}(\rho, \phi) = \underline{0}$$

$$k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$$

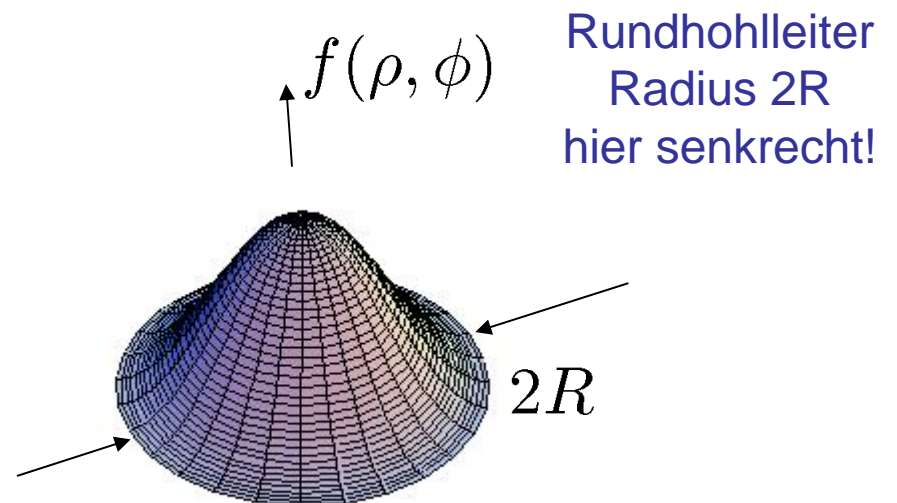
Mathematische Herleitung der Moden: **Rundhohlleiter** (2)

$$(\Delta + k_c^2) \underline{f}(\rho, \phi) = \underline{0} \quad k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$$

↳ $\underline{f} \sim J_n(k_c \rho) \cdot \cos n\phi$

Schwingungsgleichung
(Analogie: eingespannte Membran)

Darstellung der z-Komponente!



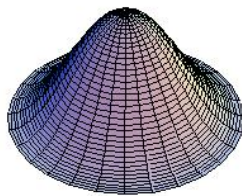
Felder & Komponenten II

2 Typen von Randbedingungen

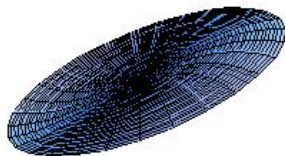
H-Wellen (TE)

$$f \hat{=} H_z; \quad \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$$

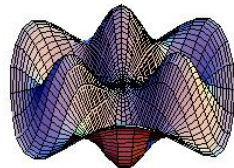
$$\Rightarrow f \sim J_n(k_c \rho) \cdot \cos n\phi$$



TE₀₁



TE₁₁

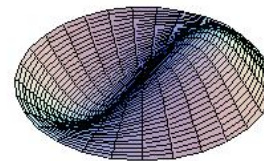


TE₃₂

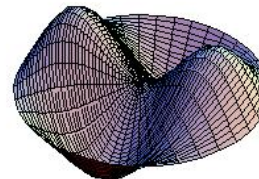
E-Wellen (TM)

$$f \hat{=} E_z; \quad f = 0$$

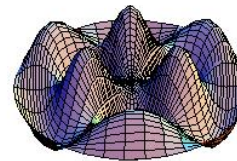
$$\Rightarrow f \sim J_n(k_c \rho) \cdot \cos n\phi$$



TM₁₁



TM₂₁



TM₃₂

Felder & Komponenten II

Bestimmen von k_c mit Randbedingung

$$f \sim J_n(k_c \rho) \cdot \cos n\phi$$

$$k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$$

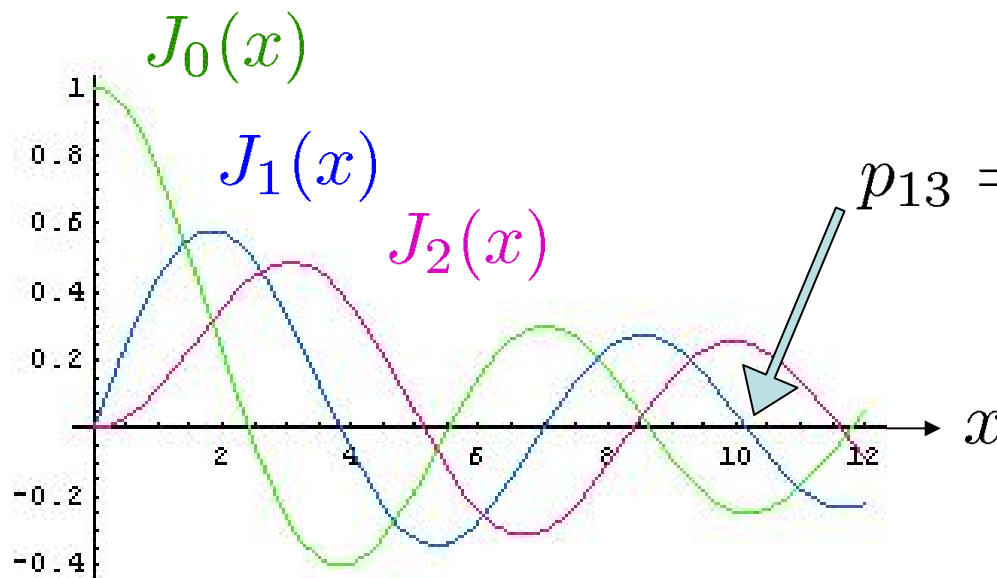
$$\underline{H}_z = 0, f \sim \underline{E}_z$$

Hohlleiterradius

$$\text{TM: } J_n(k_c R) = 0 \quad \hookrightarrow k_c = \frac{p_{nm}}{R}$$

p_{nm} ist m -te Nullstelle von J_n

$$\omega_{\text{cutoff}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \frac{p_{nm}}{R}$$



Bestimmen von k_c mit Randbedingung

$$f \sim J_n(k_c \rho) \cdot \cos n\phi$$

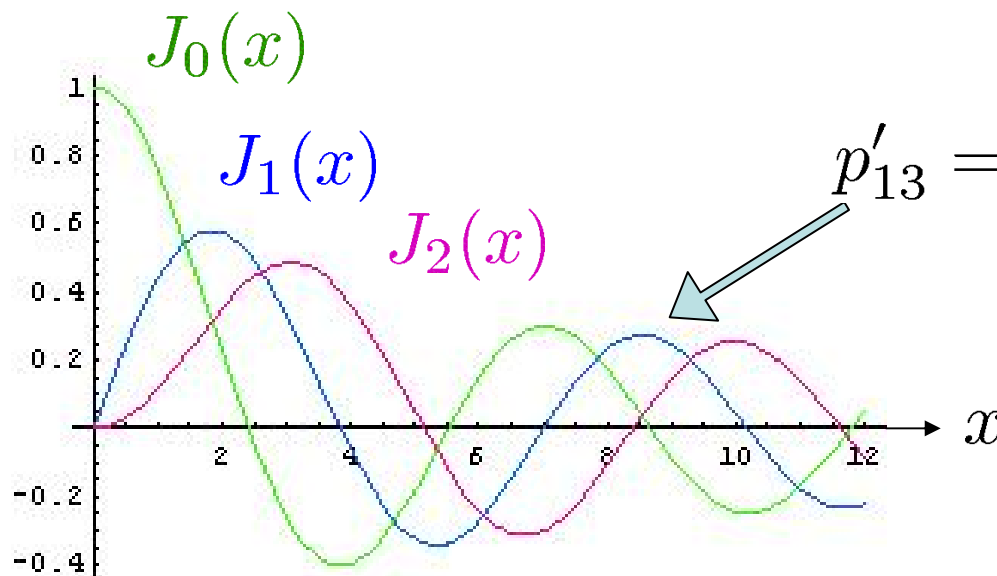
$$\underline{E}_z = 0, f \sim \underline{H}_z$$

TE: $J'_n(k_c R) = 0$

$\hookrightarrow k_c = \frac{p'_{nm}}{R}$

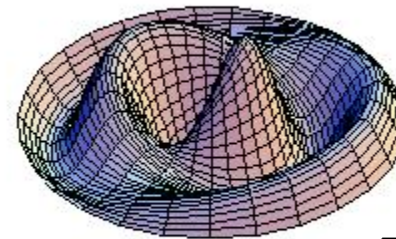
p'_{nm} ist m -te Nullstelle von J'_n

$$\omega_{\text{cutoff}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{p'_{nm}}{R}$$

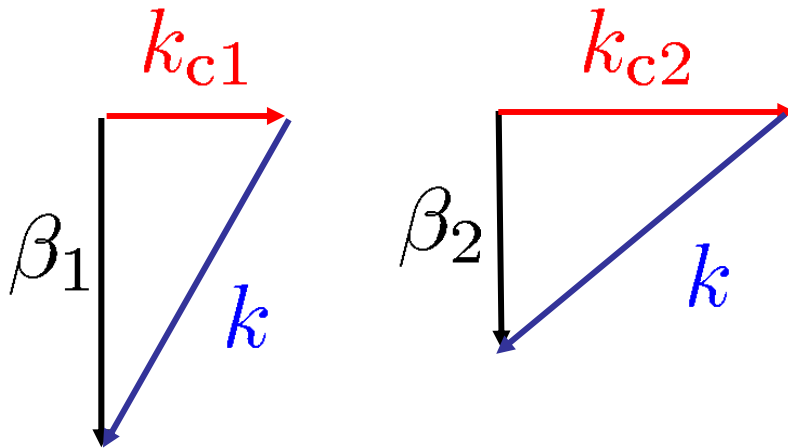


“Aufteilung” der Wellenzahl k in Quer- und Längsanteil

$$k^2 = k_c^2 + \beta^2$$



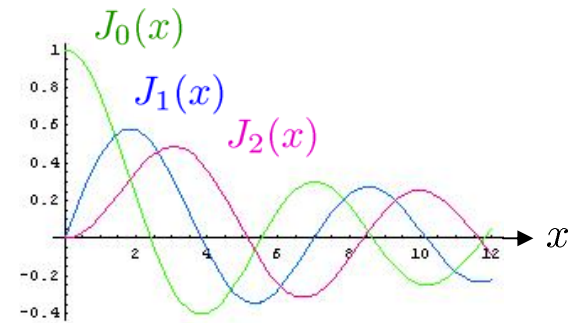
TM₁₃



k_c nur im radialen Teil

$$J_n(k_c \rho) \cdot \cos n\phi$$

Erste Nullstellen der Besselfunktionen



1.84118 TE_{11} }
 2.40483 TM_{01} } Monomode-Bandbreite $\approx 1.306 \dots$

3.05424 TE_{21}
 3.83171 TM_{11}, TE_{01}

$$\omega_{\text{cutoff}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{p_{nm}^{(l)}}{R}$$

4.20119 TE_{31}
 5.13562 TM_{21}

Achtung: Moden-Nummerierung grundsätzlich anders als beim Rechteck.

5.31755 TE_{41}
 5.33144 TE_{12}

5.52008 TM_{02} sehr unregelmässige Verteilung der Moden!

⋮