1 Trigonometrische Funktionen

Definition aus den komplexen Zahlen

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Einige Werte der trigonometrischen Funktionen

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Identitäten mit trigonometrischen Funktionen

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\sin^2(x) = 1/2 \cdot (1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = 1/2 \cdot (1 + \cos(2x))$

Orthogonalitätsrelationen für $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{falls } n = k = 0 \\ \pi, & \text{falls } n = k \neq 0 \\ 0, & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = k = 0 \\ \pi, & \text{falls } n = k \neq 0 \\ 0, & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

Integrale mit trigonometrischen Funktionen

- $\int x\sin(x)dx = \sin(x) - x\cos(x)$
- $\int x^2\sin(x)dx = (2 - x^2)\cos(x) + 2x\sin(x)$
- $\int x\cos(x)dx = \cos(x) + x\sin(x)$
- $\int x^2\cos(x)dx = 2x\cos(x) + (x^2 - 2)\sin(x)$
- $\int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{\sin^2(x)}{2}$
- $\int \sin^2(x)dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}$
- $\int \cos^2(x)dx = \frac{x + \sin(x)\cos(x)}{2}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x)$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)$

2 Reihenentwicklung

Taylor-Reihe für Funktionen mit einer Variable an Stelle a

$$f(x)|_{x=a} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

für Funktionen von zwei Variablen an Stelle (a, b)

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x,y)=(a,b)}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a)(x-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2\right\} + \ldots$$

Entwicklungen einiger Funktionen

- $\sin(x)|_{x=0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$
- $\cos(x)|_{x=0} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$
- $\tan(x)|_{x=0} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$
- $e^x|_{x=0} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Fourier Reihe eines periodischen Signals $f(x)$ mit Periode T ist definiert durch

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx$$

Entwicklungen einiger Funktionen

- Rechteck: $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{T}$
- Sägezahn: $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{T}$
- Dreieck: $f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{T}$

(Der Ursprung ist jeweils so gewählt, dass die Funktionen ungerade sind.)

3 Differentialrechnung

- Kettenregel $y = u(v(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$
- Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$
- Quotientenregel $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Variable obere Grenze $\frac{1}{dx}\int_a^x f(\hat{x})d\hat{x} = f(x)$
- Partielle Integration: $\int f' \cdot g \; dx = fg - \int f \cdot g' \; dx$
- Substitution: $\int_a^b h(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h(u)du; \; u = g(x)$

4 Transformationen

Laplace-Transformation eines zeitkontinuierlichen Signals $f(.)$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

mit Definitionsbereich $\text{ROC}(f) = \{s \in \mathbb{C} : r_1 < \text{Re}(s) < r_2\}$.

Fourier-Transformation eines zeitkontinuierlichen Signals $f(.)$ entspricht der Laplace-Transformation auf der imaginären Achse.

$$F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

mit Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

z-Transformation eines zeitdiskreten Signals $f[.]$

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]z^{-k}$$

mit Definitionsbereich $\text{ROC}(f) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$.

Spektrum Die zeitdiskrete Fourier-Transformierte von $f[.]$ ist

$$F(e^{j\Omega}) = F(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f[k]e^{-j\Omega k}$$

Das Spektrum entspricht der z-Transformierten auf dem Einheitskreis und ist daher periodisch mit Periode 2π.

5 Matrizen

- $AB \neq BA$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $Tr(A) = \sum_i A_{ii} = \sum_i \lambda_i$
- $Tr(AB) = Tr(BA)$
- $Tr(A^T) = Tr(A)$
- $\det(A) = \prod_i \lambda_i$
- $\det(cA) = c \cdot \det(A)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- $\det(A^n) = \det(A)^n$
- $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
- $e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \ldots$

Ableitungen von Matrizen und Vektoren

- $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = [\frac{\partial x_1}{\partial t} \; \frac{\partial x_2}{\partial t} \; \frac{\partial x_3}{\partial t}]^T$
- $\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = [\frac{\partial f}{\partial x_1} \; \frac{\partial f}{\partial x_2} \; \frac{\partial f}{\partial x_2}]$
- $\frac{\partial x^T a}{\partial x} = \frac{\partial a^T x}{\partial x} = a^T$
- $\frac{\partial Ax}{\partial x} = A^T$
- $\frac{\partial x^T A}{\partial x} = A$
- $\frac{\partial x^T Ax}{\partial x} = (A + A^T)x$

Roman Bosshard, 2011. Version 0.1
http://people.ee.ethz.ch/boroman