Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Roman Bosshard, 2. Februar 2008

1 Definitionen

- $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ und $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- $\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

2 Beziehungen zwischen trig. und hyp. Funktionen

- $\sin(ix) = i\sinh(x)$ und $\sinh(ix) = i\sin(x)$
- $\cos(ix) = \cosh(x)$ und $\cosh(ix) = \cos(x)$

3 Grundlegende trigonometrische Indentitäten

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$
- $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$
- $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$
- $|\sin(\frac{x}{2})| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x))}$
- $|\cos(\frac{x}{2})| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(x))}$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

4 Trigonometrische Sätze

- Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
- Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

5 Einige Werte der trigonometrischen Funktionen

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

6 Integrale mit trigonometrischen Funktionen

- $\int x\sin(x)dx = \sin(x) - x\cos(x)$
- $\int x^2\sin(x)dx = (2 - x^2)\cos(x) + 2x\sin(x)$
- $\int x\cos(x)dx = \cos(x) + x\sin(x)$
- $\int x^2\cos(x)dx = 2x\cos(x) + (x^2 - 2)\sin(x)$
- $\int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{\sin^2(x)}{2}$
- $\int \sin^2(x)dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}$
- $\int \cos^2(x)dx = \frac{x + \sin(x)\cos(x)}{2}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x)$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)$

7 Orthogonalitätsrelationen

Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt bei Integration über eine Periode:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{falls } n = k = 0 \\ \pi, & \text{falls } n = k \neq 0 \\ 0, & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = k = 0 \\ \pi, & \text{falls } n = k \neq 0 \\ 0, & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)dx = 0$$

8 Grundlegende hyperbolische Indentitäten

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1 - 2\sinh^2(x)$
- $\sinh(3x) = 3\sinh(x) + 4\sinh^3(x)$
- $\cosh(3x) = 4\cosh^3(x) - 3\cosh(x)$
- $\mid \sinh(\frac{x}{2}) \mid = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh(x) - 1)}$
- $\cosh(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh(x) + 1)}$

9 Inverse hyperbolische Funktionen

- $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ mit $x \geq 1$
- $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(\frac{1+x}{1-x})$ mit $\mid x \mid < 1$