Technische Mechanik Zusammenfassung

Roman Bosshard, 14. Februar 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Freiheitsgrad

Der Freiheitsgrad eines Systems beträgt: $f = n - b$
f: Summe der Freiheitsgrade der einzelnen starren Körper
b: Anzahl Bindungsgleichungen
Ein starrer Körper hat $f = 6$, ein math. Punkt im Raum hat $f = 3$.

1.2 Zylinderkoordinaten

$x = r\cos\phi$
$y = r\sin\phi$
$z = z$ und $r = \sqrt{1 + z^2}$

1.3 Geschwindigkeit

$v = \dot{r} = \dot{x}e_x + \dot{y}e_y + \dot{z}e_z$
$|v| :=$ Schnelligkeit

1.3.1 Zylinderkoordinaten

$v = \dot{\rho}e_\rho + \rho\dot{\phi}e_\phi + \dot{z}e_z$, wobei $e_\rho = \cos\phi e_x + \sin\phi e_y$ und $e_\phi = -\sin\phi e_x + \cos\phi e_y$

1.3.2 Polarkoordinaten

$v = \dot{r}e_r + r\dot{\phi}e_\phi$

2 Starre Körper

Def.: $\overline{PQ} = const. \forall P, Q \in K$

2.1 Satz der projizierten Geschwindigkeiten

Wenn P und Q auf einer Geraden liegen, haben sie die gleiche Geschwindigkeit: $v'_P = v'_Q$

2.2 Satz vom Momentanzentrum

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BP}$

3 Statik

3.1 Moment

$M_O = r \times \vec{F}$
$|M_O| = \pm d \cdot |\vec{F}|$

Ein Moment kann durch ein Kräftepaar ersetzt werden, wenn die beiden Kräfte in der Ebene senkrecht zu M liegen und $|M| = \pm d \cdot |F|$.

3.2 Leistung

$\wp = \vec{F} \cdot \vec{v}_P$; für reine Rot. $\wp = \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$
$\wp_{tot} = \sum_i \wp_i$

3.3 Kinemate: $\{\vec{v}_B, \omega\}$

Invarianten: $I_1 = \omega$ und $I_2 = \omega \cdot \vec{v}_B$

3.4 Dyname: $\{\vec{R} = \sum_i F_i, \vec{M}_O = \sum_i r_i \times F_i\}$

Invarianten: $I_1 = \vec{R}$ und $I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_O$

$M_P = M_O + r_{PO} \times R$
$\wp = R \cdot v_B + M_B \cdot \omega$

3.5 Statische / Starrkörper - Äquivalenz

Eine Kräftegruppe $\{F_i\}$ kann durch die Kräftegruppe $\{G_i\}$ ersetzt werden, falls sie dieselbe Dyname besitzen und gilt $\wp(\{F_i\}) = \wp(\{G_i\}) \forall$ Starrkörperbewegungen.

Eine Kräftegruppe ist statisch äquivalent zu

- einem Nullsystem, falls $\vec{R} = 0, \vec{M}_O = 0$
- einem Kräftepaar, falls $\vec{R} = 0, \vec{M}_O \neq 0$
- einer Einzelkraft, falls $\vec{R} \neq 0, I_2 = 0$
- einer Schraube, falls $I_2 \neq 0$, dh. $\vec{R} \parallel \vec{M}_O$

3.6 Prinzip der virtuellen Leistungen

Ein System ist in Ruhe, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte (sowie der für die Beschleunigungen der wirklichen Bewegung berechneten Trägheitskräfte) bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet.

$$\tilde{\wp} = \wp^{(i)} + \wp^{(a)} + \wp^{(t)} = 0 \quad \forall\{\tilde{v}\}$$

3.7 Hauptsatz der Statik

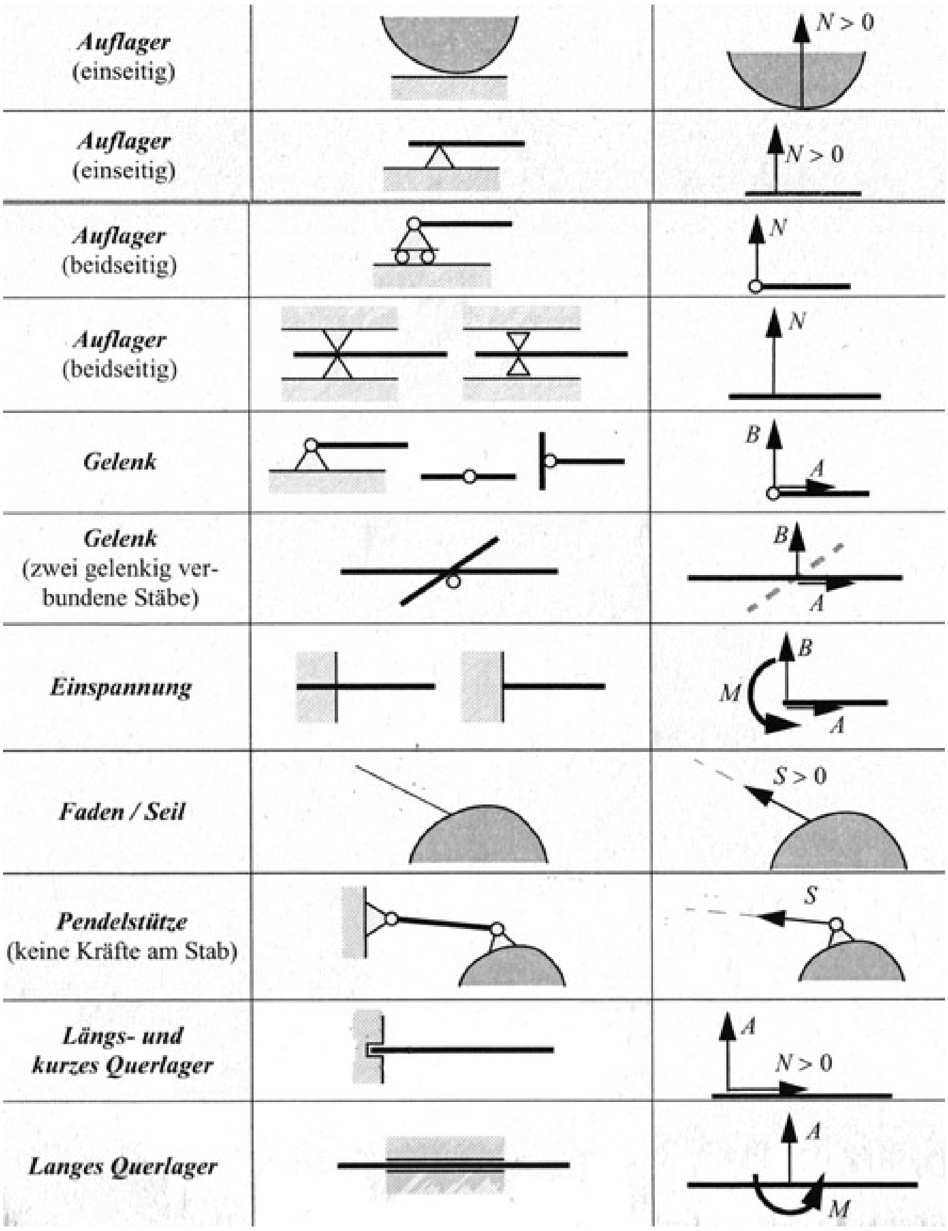
In einer Ruhelage müssen alle (äusseren) Kräfte im Gleichgewicht sein:

$$\vec{R} = 0 \quad \vec{M}_O = 0$$

und

$$\tilde{\wp} = R \cdot \tilde{v_O} + M_O \cdot \tilde{\omega} \quad \forall\{\tilde{v_O}, \tilde{\omega}\}$$

3.8 Verschiedene Bindungen und Lager



3.9 Kräftemittelpunkt

$$r_C = \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{N} F_i r_i \quad mit \quad R = \sum_{i=1}^{N} F_i$$

$$r_C = \frac{1}{m} \iiint_B r dm$$

$$r_C = \frac{1}{\{V, A, L\}} \iiint_K r d\{V, A, L\}$$

4 Reibung

4.1 Haftreibung: $|F| \leq \mu_0 |N|$

4.2 Gleitreibung: $|F| = \mu_1 |N|$

Gerichtet: $\vec{F} = -\mu_1 |N| \frac{\vec{v}_B}{|\vec{v}_B|}$ ($\vec{v}_B$ Vektor in Bewegungsrichtung)

4.3 Rollreibung

- Ruhe: $|M_f| \leq \mu_2 |N|$
- Bewegung: $|M_f| = \mu_2 |N|$

M_f ist ω entgegengesetzt orientiert.

4.4 Ideal rau: $\mu_0 = \infty \, \mu_2 = 0$

5 Dynamik

5.1 Beschleunigung

$a = \dot{v} = \ddot{r} = \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y + \ddot{z}e_z$

5.1.1 Zylinderkoordinaten

$a = (\ddot{\rho} \quad \underbrace{-\rho\dot{\phi}^2}_{Zentripetal-B.} \quad)e_\rho + (\rho\ddot{\phi} \quad \underbrace{+2\dot{\rho}\dot{\phi}}_{Coriolis-B.} \quad)e_\phi + \ddot{z}e_z$

5.1.2 In Polarkoordinaten

$a = (r - r\dot{\phi}^2)e_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})e_\phi$
Für r = konst.: $a = -r\dot{\phi}^2 e_r + r\ddot{\phi}e_\phi$

5.2 Intertialsystem

Da geradlinige, gleichförmige Bewegungsanteile (v =const.) keinen Anteil an die Trägheitskräfte liefern ($\dot{v} = 0$), spelt es keine rolle, ob sich ein Bezugssystem mit (vektoriell) konstanter Geschwindigkeit bewegt. D.h. alle solchen Systeme sind gleichwertig $\leftrightarrow$ inertial.

5.3 Kinematische Relation

Der mathematische Zusammenhang zweier verschiedenen Koordinaten in einem System verbundener Körper wird als kinematische Relation bezeichnet. Meistens: $\dot{x} = \dot{y}$

5.4 Newton'sches Bewegungsgesetz

Anwendbar, wenn eventuelle Rotationen und Deformationen die Resultierende der äusseren Kräfte nicht verändern und auch nicht gefragt sind.

$R = m \cdot a = \dot{p} \rightarrow \vec{R} \parallel \vec{a}$

5.5 Impulssatz

$p = \iint_B v dm = m \cdot \ \vec{v}$

5.5.1 Massenmittelpunktsatz

$R = \dot{p} = m \, a_C = \frac{d}{dt}(m \, v_C) \quad |C$: Massenmittelpunkt

5.5.2 Vollkommen inelastischer Stoss

Zwei Körper haben nach einem Stoss die gleiche Geschwindigkeit.

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

5.5.3 Elastischer Stoss

Die kinetische Energie bleibt erhalten: $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$
Also gilt für v_1' und v_2':

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

Dabei wechselt die Relativgeschwindigkeit ihr Vorzeichen: $v_2' - v_1' = k(v_1 - v_2)$
Für den inelastischen Stoss ist $k = 0$, für den elastischen ist $k = 1$. In der Realität gilt $0 \leq k \leq 1$. Je grösser die Stosszeit, desto kleiner die maximalen Stosskräfte.

5.6 Drallsatz

$\dot{L}_O = M_O = I_O \dot{\omega} \quad |I_O$: Massenträgheitsmoment
$L_O = \iiint_B r \times v dm \quad$ und $\quad I_O = \iint_B r^2 dm$

5.6.1 Umrechnungsformel für einen ortsfesten Punkt in B

$L_O = r_C \times p + L_C \quad \rightarrow \quad M_O = r_C \times R + M_C$