

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Prinzip der Regeltechnik</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modellierung</b>	<b>3</b>
2.1	Verschiedene Systeme . . . . .	3
2.2	Linearisierung . . . . .	3
2.3	Analytische Lösung . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Dynamisches Verhalten von Systemen</b>	<b>4</b>
3.1	Laplace Transformation . . . . .	4
3.2	Partialbruchzerlegung . . . . .	4
3.3	Blockdiagramm-Algebra . . . . .	5
3.4	Systemantworten . . . . .	6
3.4.1	System erster Ordnung . . . . .	6
3.4.2	System zweiter Ordnung . . . . .	7
3.5	Spezifikationen . . . . .	8
3.6	Systeme höherer Ordnung . . . . .	9
3.7	Zusätzliche Pole und Nullstellen . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Regelkreise</b>	<b>10</b>
4.1	Struktur eines Regelkreises . . . . .	10
4.2	P-Regler . . . . .	11
4.3	PI-Regler . . . . .	11
4.4	PD-Regler . . . . .	11
4.5	PID-Regler . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols (Skript 5-1)</b>	<b>12</b>
5.1	Sprungmethode . . . . .	12
5.2	Schwingmethode . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Antiwindup (6-1)</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Stabilität</b>	<b>13</b>
7.1	Routh's Stabilitätskriterium . . . . .	13
7.1.1	Routh-Tableau (Bsp 7-6) . . . . .	13
<b>9</b>	<b>Bodediagramme</b>	<b>14</b>
<b>10</b>	<b>Stabilität im Frequenzbereich</b>	<b>15</b>
10.1	Bode Stabilitätskriterium . . . . .	15
10.2	Nyquist Stabilitätskriterium . . . . .	15
<b>11</b>	<b>Stabilitätsmasse</b>	<b>16</b>
11.1	Reservenfaktoren . . . . .	16
11.2	GM und PM als Entwurfskriterien . . . . .	16
<b>12</b>	<b>Dynamische Kompensatoren</b>	<b>17</b>
12.1	PD-Kompensation . . . . .	17
12.2	Lead-Kompensation . . . . .	18
12.3	PI-Kompensation . . . . .	19
12.4	Lag-Kompensation . . . . .	19
12.5	PID-Kompensation . . . . .	19
<b>13</b>	<b>Nicht minimalphasige Elemente</b>	<b>20</b>
13.1	Totzeit . . . . .	20
13.2	Nullstelle in der RHE . . . . .	20
13.3	Totzeitkompensator . . . . .	21
<b>14</b>	<b>Erweiterung der Regelungsstruktur</b>	<b>21</b>
14.1	Störgrössenaufschaltung (Feedforward Control) . . . . .	21
14.2	Kaskadenregelung . . . . .	22

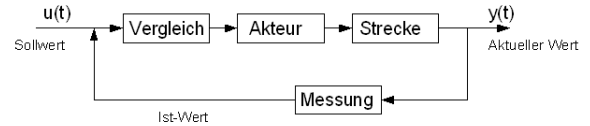
---

<b>15 Mehrvariablenregelung</b>	<b>22</b>
15.1 Regelkreisstrukturen . . . . .	22
15.2 Beispiel zum Mischtank (15-6 bis 15-9) . . . . .	23
15.3 Kopplungsmass: Relativ Gain Array . . . . .	23
15.4 Enkopplungskompensator . . . . .	23
<b>16 Zustandsraumdarstellung</b>	<b>24</b>
16.1 Normalformen . . . . .	24
16.2 Zustandstransformation . . . . .	25
16.3 Verlust der Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit . . . . .	26
16.4 Zerlegung nach Kalman . . . . .	26
16.5 Eigenwerte und Pole . . . . .	27
16.6 Nullstellen in der Zustandsraumdarstellung . . . . .	27
<b>17 Reglerentwurf im Zustandsraum</b>	<b>27</b>
17.1 Zustandsrückführung . . . . .	27
17.2 Referenzsystem . . . . .	28
17.3 Integralregelung . . . . .	28
17.4 Zustandsschätzung . . . . .	29
17.5 Dualität . . . . .	29
17.6 Zustandsrückführung mit Beobachter . . . . .	30

# 1 Prinzip der Regeltechnik

- Vergleich: Sollwert wird mit Ist-Wert verglichen und ein entsprechender Stellwert, welcher die Differenz zwischen Soll- und Istwert verkleinern wird, wird dem Akteur übergeben.
- Akteur: Einrichtung, die die Strecke entsprechend dem Stellwert verändern kann.

- Strecke: Zu regelndes System
- Messung: Misst den aktuellen Ausgang der Strecke.



# 2 Modellierung

## 2.1 Verschiedene Systeme

System	Elemente	Gleichungen
Translation	- Feder: $F_{el} = k_{el} \cdot \Delta x$ - Dämpfer: $F_d = b \cdot \Delta v = b \cdot \Delta \dot{x}$	Newton'sches Gesetz: $M\ddot{x} = \text{Summe aller Kräfte}$
Rotation	- $I$ : Trägheitsmoment - $M = F \cdot r$ : Moment - $\Theta$ : Winkel	Drallsatz: $I\ddot{\Theta} = \text{Summe aller Momente}$ elektrische Konstante $K_e$ : $v_L = K_e \cdot \dot{\Theta}$ mechanische Konstante $K_t$ : $M = K_t \cdot i_a$
Elektrische Systeme	- $C$ : $i_c = C \cdot \dot{u}_C$ - $L$ : $u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$ - $R$ : $U = I \cdot R$	Maschen und Knotenregel
Thermische Systeme	- Massenstrom: $\omega_S = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}}$ - Umgebungstemperatur $T_U$ - Systemtemperatur $T_S$ - Wärmekapazität : $C_S = m \cdot c_{vs}$ $c_{vs} = [JK^{-1}Kg^{-1}]$ - Wärmeübertragungswiderstand: $R = [KsJ^{-1}]$	Energiebilanz: Akkumulation=Zufuhr-Abfuhr $C_S \dot{T}_S = \omega_S c_{vs} T_{in} - \omega_S c_{vs} T_S - \frac{1}{R} (T_U - T_S)$
Massensysteme	- Geschwindigkeit der Teilchen: $v = \sqrt{2gh}$ - Massenfluss: $\omega = \rho Av$ $\omega = [Kgs^{-1}]$	Akkumulation=Einfluss-Ausfluss $\frac{d}{dt}(\rho Ah) = \omega_{in} - \omega_{out}$

## 2.2 Linearisierung

Es ist:  $\dot{x} = f(x, u)$  man möchte  $\dot{x} = Ax + Bu$   
 $y = h(x, u)$   $y = Cx + Du$

<p>Linearisierung am stationären Zustand <math>f(x_S, u_S) = 0</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\dot{x} = \underbrace{f(x_S, u_S)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big _{u=u_S, x=x_S} \cdot \underbrace{(x - x_S)}_{=\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial u} \Big _{u=u_S, x=x_S} \cdot \underbrace{(u - u_S)}_{=\Delta u} = \dot{x} - \underbrace{\dot{x}_S}_{=0}</math>  <math>\Rightarrow \Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u</math></li> <li>• <math>y = \underbrace{h(x_S, u_S)}_{=y_S} + \frac{\partial h}{\partial x} \Big _{u=u_S, x=x_S} \cdot \underbrace{(x - x_S)}_{=\Delta x} + \frac{\partial h}{\partial u} \Big _{u=u_S, x=x_S} \cdot \underbrace{(u - u_S)}_{=\Delta u}</math>  <math>\Rightarrow y - y_S = \Delta y = C\Delta x + D\Delta u</math></li> </ul>
--

### 2.3 Analytische Lösung

Aus  $\dot{x} = Ax + Bu$  ergibt sich folgende Lösung für den Zustand mit der Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_{t_0}$ :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A-(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

mit  $e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$

## 3 Dynamisches Verhalten von Systemen

### 3.1 Laplace Transformation

einseitige Laplace Transformation

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Rücktransformation (meist über Partialbruchzerlegung)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma+j\omega}^{\sigma-j\omega} F(s)e^{st} ds$$

Laplace Transformationen	
$f(t)$	$\iff f(t)$
$\delta(t)$	$\iff 1$
$\frac{1}{s}$	$\iff \sigma(t)$
$\frac{1}{s^2}$	$\iff t$
$\frac{(n-1)!}{s^n}$	$\iff t^{n-1}$
$\frac{1}{s+a}$	$\iff e^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\iff \frac{1}{n-1} t^{n-1} e^{-at}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\iff \sin(at)$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\iff \cos(at)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\iff e^{-at} \cos(bt)$
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\iff e^{-at} \sin(bt)$

Eigenschaften der Laplace Transformation	
$f(t)$	$\iff F(s)$
$f(t-t_0)$	$\iff e^{-t_0s} F(s)$
$f(at)$	$\iff \frac{1}{ a } F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f^{(m)}(t)$	$\iff s^m F(s) - s^{m-1} f(0) - s^{m-2} f'(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)$
$\int f(t) dt$	$\iff \frac{1}{s} F(s)$
$f_1(t) * f_2(t)$	$\iff F_1(s) \cdot F_2(s)$
$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\iff \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\iff \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

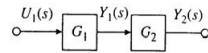
### 3.2 Partialbruchzerlegung

(Siehe Skrip Seite 3.15-3.19)

### 3.3 Blockdiagramm-Algebra

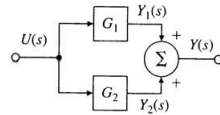
1. Serieschaltung

$$Y_2 = G_1 G_2 U_1$$



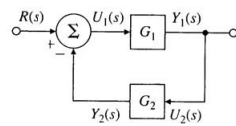
2. Parallelschaltung

$$Y = (G_1 + G_2)U$$



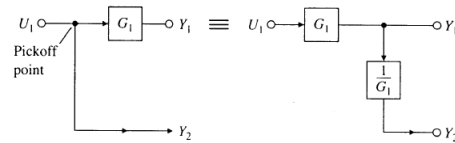
3. Rückkoppelung

$$Y_1 = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} R \Leftrightarrow \frac{\text{ÜF vorwärts zwischen Ein- und Ausgang}}{1 - \text{ÜF im Kreis}}$$



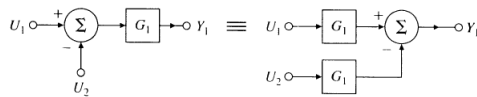
4. Pick-Off-Point

Man muss Blockdiagramm um  $1/G_1$  korrigieren



5. Distributionsgesetz

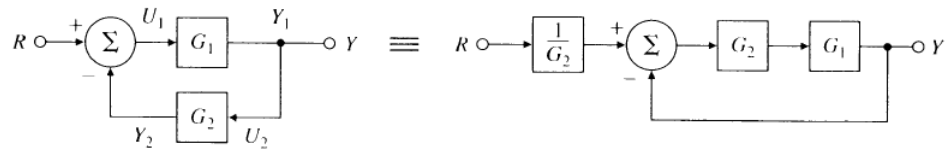
$$(U_1 + U_2)G_1 = U_1 G_1 + U_2 G_1$$



6. Basteln mit Rückkoppelung

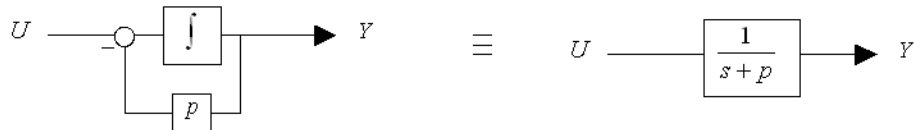
Man muss schauen das man  $G_2$  in der Vorwärtsfunktion kompensieren kann

Man muss schauen das  $1/G_2$  nicht im Kreis vorkommt, daher vor Rückkoppelung ziehen



7. Integrator

Element, dass man häufigsten vorkommt



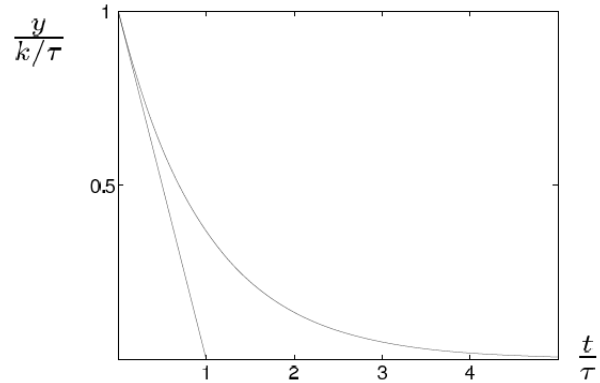
### 3.4 Systemantworten

#### 3.4.1 System erster Ordnung

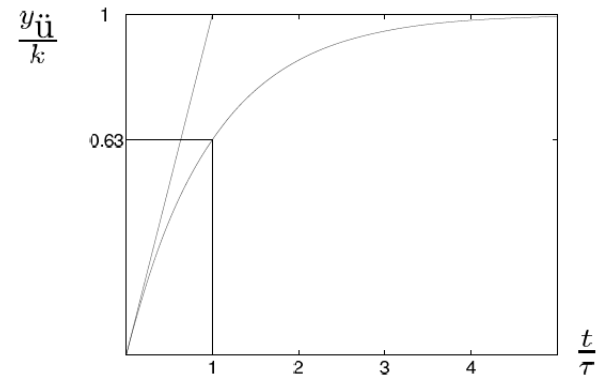
$$Y(s) = \frac{k}{\theta s + 1} \quad k : \text{Verstärkungsfaktor}$$

$\tau$  : Zeitkonstante

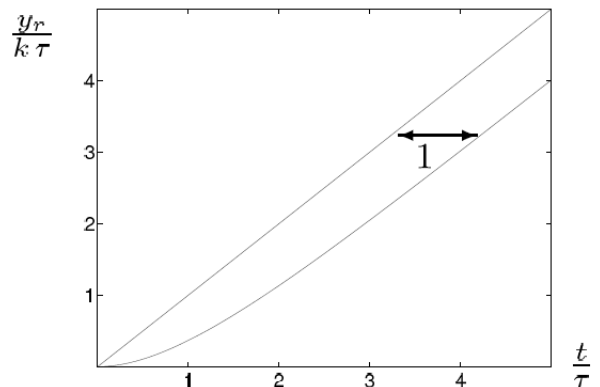
Impulsantwort	$Y_i(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$
Anfangswert	$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y_i(s) = \frac{k}{\tau}$
Endwert	$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s Y_i(s) = 0$
Zeitfunktion	$y(t) = \frac{k}{\theta} e^{-\frac{t}{\tau}}$
Anfangssteigung	$\left. \frac{dy}{dt} \right _{t=0} = -\frac{k}{\theta^2}$



Sprungantwort	$Y_G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \frac{1}{s}$
Zeitfunktion	$y_G(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
Endwert	$\lim_{t \rightarrow \infty} y_G(t) = k$
Anfangssteigung	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy_G}{dt} = \frac{k}{\tau}$



Rampenantwort	$Y_R(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \frac{1}{s^2}$
Zeitfunktion	$y_r(t) = k \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$
Endwert	$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = k(t - \tau)$
Anfangssteigung	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy_r}{dt} = 0$
Endsteigung	$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy_r}{dt} = k$



3.4.2 System zweiter Ordnung

Sprungantwort 
$$Y = \frac{k}{(\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1)} \frac{1}{s} = \frac{k\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \frac{1}{s}$$

$k$  : Verstärkungsfaktor,  $\tau$  : Zeitkonstante,  $\xi$  : Dämpfungsfaktor,  $\omega_n = 1/\tau$  : Natürliche Frequenz

Falls der Zähler nicht Grad 0 hat muss man folgenden Ansatz wählen:

$$Y = K \frac{\frac{s}{\alpha\xi\omega_N} + 1}{\left(\frac{s}{\omega_N}\right)^2 + \frac{2\xi s}{\omega_N} + 1}$$

Charakteristische Gleichung  $\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1 = 0$

Fall 1  $0 < \xi < 1$  komplexe Wurzeln - gedämpft

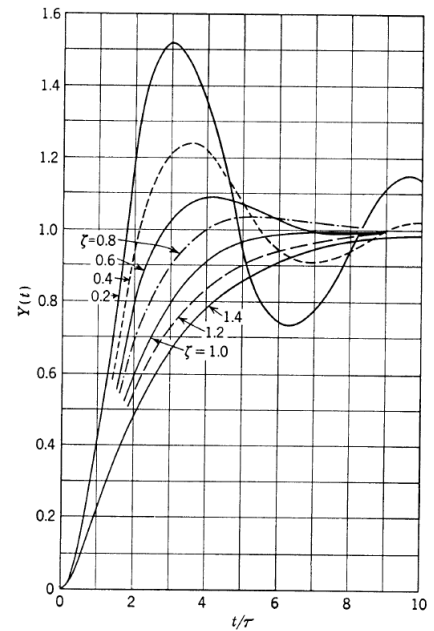
$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \frac{t}{\tau}} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{\tau} + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)$$

Fall 2  $\xi = 1$  Doppelte Wurzel - kritisch gedämpft

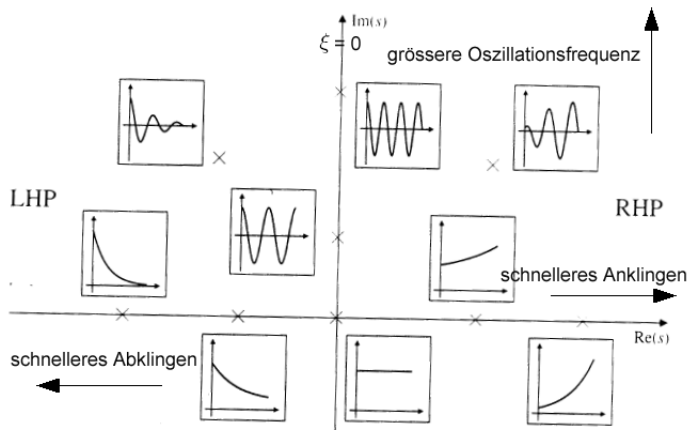
$$y(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Fall 3  $\xi > 1$  Reelle Wurzeln - überkritisch gedämpft

$$y(t) = 1 - e^{-\xi \frac{t}{\tau}} \left( \cosh\left(\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{t}{\tau}\right) + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sinh\left(\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{t}{\tau}\right) \right)$$



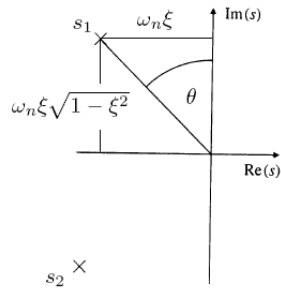
Zusammenhang zwischen der Lage der Pole in der Komplexen Ebene und der Impulsantworten:



### 3.5 Spezifikationen

Pole

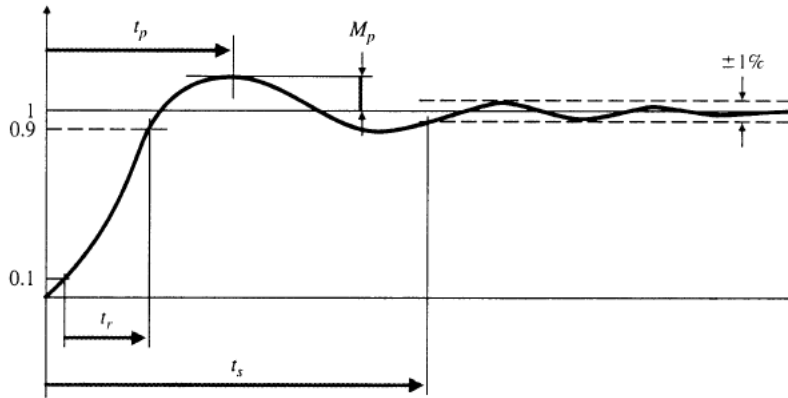
$$s_{1,2} = -\omega_n(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) = \underbrace{-\omega_n\xi}_{\alpha} \mp j \underbrace{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}_{\beta} = \alpha + j\beta$$



Es folgt aus der Grafik:  $\sin \theta = \xi$      $\arcsin \xi = \theta$

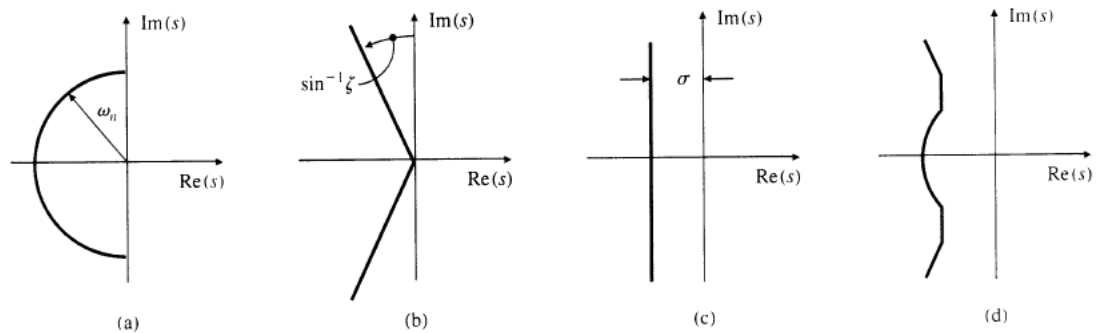
Spezifikationen

Für ein gedämpftes System 2. Ordnung ergibt sich folgende Sprungantwort:



- Anstiegszeit  $t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$
- Anregelzeit  $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi}}$
- Überschwingen  $M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad 0 \leq \xi < 1$
- Ausregelzeit  $t_s \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n} \quad \xi\omega_n = \Re\{\{s_i\}\} = \sigma$

Kritische Bereiche links dieser Gebiete werden Parameter schlechter:



(a) für  $t_r$     (b) für  $M_p$     (c) für  $t_s$  und (d) alles zusammengefasst

### 3.6 Systeme höherer Ordnung

$n$  Systeme 1. Ordnung in Serie 
$$Y = \left( \frac{1}{\tau s + 1} \right)^2 \frac{1}{s}$$

Zeitkonstante des Gesamtsystems  $\approx$  Summe der Zeitkonstanten der Einzelsysteme

Totzeit  $\approx$  Kaskade von Systemen 1. Ordnung

### 3.7 Zusätzliche Pole und Nullstellen

<p><b>Zusätzliche Nullstellen</b></p> <p>in der LHE</p> <p>in der RHE</p>	<p>Verstärkt Überschwingen, falls NS weniger als Faktor 4 vom Realteil der Pole entfernt.</p> <p>Unterdrückt das Überschwingen und kann zu Unterschwingen führen.</p>
<p><b>Zusätzlicher Pol</b></p> <p>Zusätzlicher Pol</p>	<p>Verlängert Anstiegszeit, falls Pol weniger als Faktor 4 vom Realteil der komplexen Pole entfernt.</p>

## 4 Regelkreise

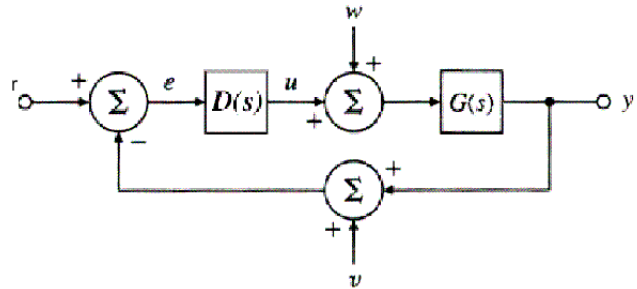
### 4.1 Struktur eines Regelkreises

Ausgangsfunktion  $Y(s) = \frac{[R(s)D(s) + BW(s)]G(s)}{1 + D(s)G(s)}$

$$D(s) = K \text{ (P-Regler)}$$

$$G(s) = \frac{A}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + A}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{AKR(s) + BW(s)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + AK}$$

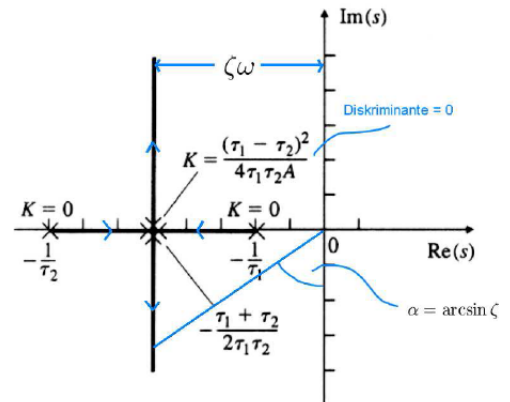


Char. Gleichung  $s_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 + AK)}}{2\tau_1\tau_2}$

Vergleich von Steuerung und Regelung			
	Steuerung (=Open Loop)	Regelung (=Closed Loop)	Formel
Übertragungsfunktion	$Y_S = AKR + BW$	$Y_S = \frac{AK}{1 + AK}R + \frac{B}{1 + AK}W$	$K$ : Verstärkung eines P-Reglers
Stationäres Verhalten $t \rightarrow \infty$			
$W = 0$	$y_{SS} = r$	$y_{SS} \approx r$	
$W \neq 0$	keinen Einfluss der Steuerung auf Störgrösse	Regelung reduziert Auswirkung von Störung um Faktor $1 + AK$	
Sensitivität $S : A \rightarrow A + \delta A$	$S_A = 1$	$S_A = \frac{1}{1 + AK}$	$S_A = \left(\frac{\delta T}{T}\right) : \left(\frac{\delta A}{A}\right) \approx \frac{A}{T} \frac{dT}{dA}$
		Regelung reduziert Auswirkungen von Änderungen in der Strecke um Faktor $1 + AK$	$T$ : transfer function

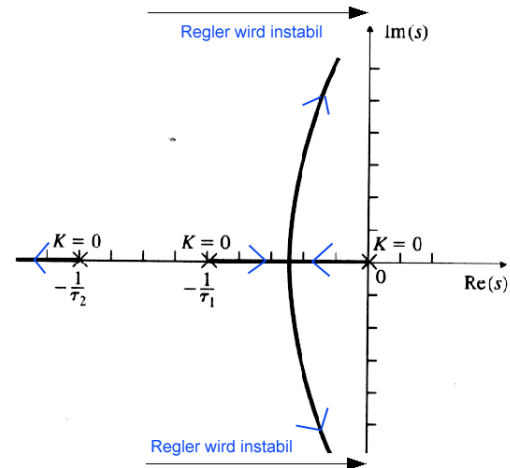
## 4.2 P-Regler

Reglerausgang	$u = Ke$
Übertragungsfunktion	$D(s) = K$
Vorteil	Im Bereich $0 < K < \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2 A}$ wird System schneller
Nachteil	Für noch grösseres $K$ wird Anstiegszeit kleiner, aber Dämpfung schlechter  kleiner stat. Fehler auf Kosten schlechteren transienten Verhaltens.



## 4.3 PI-Regler

Reglerausgang	$u = K \left[ e + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\eta) d\eta \right]$ $\frac{K}{T_I} \int_{t_0}^t e(\eta) d\eta$ : Integralanteil
Übertragungsfunktion	$D(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$
char. Gleichung	$\tau_1\tau_2 s^3 + (\tau_1 + \tau_2)s^2 + (1 + AK)s + A\frac{K}{T_I} = 0$
Vorteile	Mit Integralanteil wird der bleibende Regelfehler Null
Nachteil	Für grösseres $K$ wird Dämpfung schlechter und das System wird schliesslich instabil



## 4.4 PD-Regler

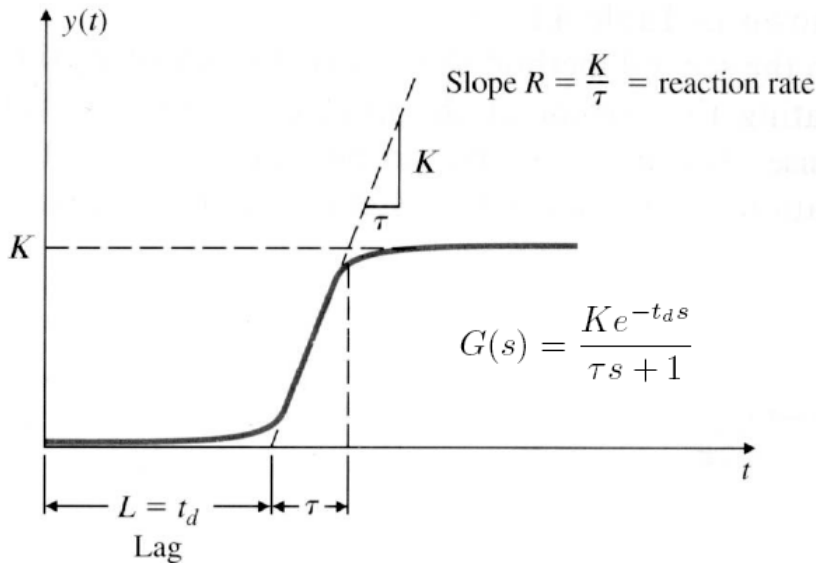
Reglerausgang	$u = K(e + T_D \dot{e})$
Übertragungsfunktion	$D(s) = K(1 + T_D s)$
Vorteile	Differentiator führt bei raschen Veränderung in $e$ zu grossen Ausschlägen in $u$  $\Rightarrow$ Regler ist empfindlich auf Messrauschen
Nachteil	Schnelligkeit wird schlechter durch D-Teil

## 4.5 PID-Regler

Reglerausgang	$u = \left( e + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\eta) d\eta + T_D \dot{e} \right)$
Übertragungsfunktion	$D(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$

## 5 Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols (Skript 5-1)

### 5.1 Sprungmethode



Type of Controller	Optimum Gain
Proportional	$K_P = \frac{1}{RL}$
Proportional-Integral	$K_P = \frac{0.9}{RL}$ $T_I = \frac{L}{0.3}$
Proportional-Integral-Differential	$K_P = \frac{1.2}{RL}$ $T_I = 2L$ $T_D = 0.5L$

### 5.2 Schwingmethode

Beim Regelkreis mit P-Regler wird  $K$  solange erhöht, bis die Stabilitätsgrenze erreicht ist.

Ultimate gain  $K_u$

Ultimate period  $P_u$  erhält man aus  $\omega_{crit}$ :

$$\angle(G(j\omega_{crit})) = -180^\circ$$

Oder man ermittelt  $K_u$  und  $P_u$  nach Aström und Hagglund.

Ultimate gain  $K_u \approx \frac{4d}{\pi a}$

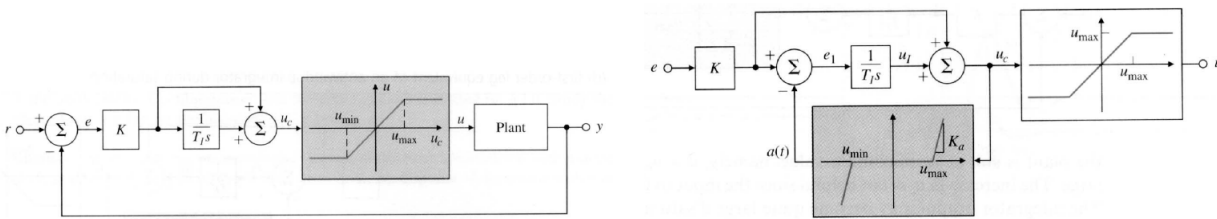
$d$ : Amplitude des Rechtecksignals

$a$ : Amplitude der Ausgangsschwingung

Ultimate period  $P_u$

Type of Controller	Optimum Gain
Proportional	$K_P = 0.5K_u$
Proportional-Integral	$K_P = 0.45K_u$ $T_I = \frac{1}{1.2}P_u$
Proportional-Integral-Differential	$K_P = 0.6K_u$ $T_I = \frac{1}{2}P_u$ $T_D = \frac{1}{8}P_u$

## 6 Antiwindup (6-1)



- **Problem:** Das linke Bild ist eine Implementierung ohne Windup. Für  $u \geq u_{max}$  sättigt  $u$  und  $u_c$  kann sehr gross werden, da der Regler  $u$  nicht mehr stellen kann, aber der Integrator trotzdem versucht den Regelfehler zu vermindern.
- **Idee:** Das rechte Bild ist eine Implementierung mit Windup. Wenn  $u$  sättigt wird der graue Block aktiv, welcher den Integral-Anteil des Reglers abstellt.

## 7 Stabilität

Ein System ist *asymptotisch stabil*, wenn alle "internen" Zustandsvariablen nie unendlich werden und für  $t \rightarrow \infty$  gegen null gehen.

Ein LTI-System ist dann und nur dann asymptotisch intern stabil, wenn alle Pole des Systems in der offenen LHE liegen

### 7.1 Routh's Stabilitätskriterium

$$a(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Notwendige Bedingung für Stabilität:  $a_i > 0$   
 Für Systeme 2. Ordnung ist diese Bedingung auch hinreichend!

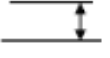
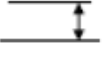

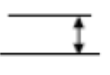

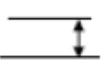

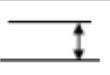
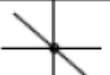
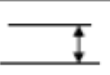

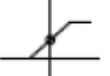
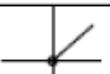
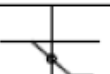


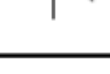

#### 7.1.1 Routh-Tableau (Bsp 7-6)

Zeile $n$	$s^n$	1	$a_2$	$a_4$	$\dots$				
Zeile $n - 1$	$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$\dots$				
Zeile $n - 2$	$s^{n-2}$	$b_2$	$b_2$	$b_3$	$\dots$				
Zeile $n - 3$	$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
Zeile 2	$s^2$	*	*						
Zeile 1	$s^1$	*							
Zeile 0	$s^0$	*							


- Alle Wurzeln sind dann und nur dann in der LHE, wenn alle Elemente in der ersten Kolonne positiv sind.
- Die Anzahl der Wurzeln in der RHE ist gleich der Anzahl von Vorzeichenänderungen in der ersten Kolonne.
- Wenn das erste Element einer Zeile null ist, ersetze das Element durch  $\epsilon > 0$  und setze fort. Wende das Stabilitätskriterium an für  $\epsilon \rightarrow 0+$ .

## 9 Bodediagramme

Übertragungsfunktion $H(j\omega)$	Amplituden-Frequenzgang $ H(j\omega) $ in dB	Phasen-Frequenzgang $\angle(H(j\omega))$
$A$ (konstante)	 $20 \cdot \log A $	 $\begin{cases} \pi & \text{falls } A < 0 \\ 0 & \text{falls } A > 0 \end{cases}$
$j \frac{\omega}{\omega_0}$	 $+20\text{dB/Dekade,}$ $0\text{dB bei } \omega_0$	 $\frac{\pi}{2}$
$-j \frac{\omega}{\omega_0}$	 $+20\text{dB/Dekade,}$ $0\text{dB bei } \omega_0$	 $-\frac{\pi}{2}$
$j \frac{\omega_0}{\omega}$	 $-20\text{dB/Dekade,}$ $0\text{dB bei } \omega_0$	 $\frac{\pi}{2}$
$-j \frac{\omega_0}{\omega}$	 $-20\text{dB/Dekade,}$ $0\text{dB bei } \omega_0$	 $-\frac{\pi}{2}$
$\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)$	 Knick bei $\omega_0$ , dann $+20\text{dB/Dekade}$	 $+\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\left(1 - j \frac{\omega}{\omega_0}\right)$	 Knick bei $\omega_0$ , dann $+20\text{dB/Dekade}$	 $-\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$	 Knick bei $\omega_0$ , dann $-20\text{dB/Dekade}$	 $-\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\frac{1}{\left(1 - j \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$	 Knick bei $\omega_0$ , dann $-20\text{dB/Dekade}$	 $+\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden

Für konjugiert komplexe Pole und Nullstellen geht man wie folgt vor: (Skript 9-7)

1. Bringe Term auf die Form:

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 + a_1 \left(\frac{s}{a}\right) + 1$$

2. Für konjugiert komplexe Nullstellen: Peak nach *oben* und *Steigung* von  $40\text{dB}$  pro Dekade bei  $\omega = a$  im Amplitudengang und  $+180^\circ$  im Phasengang bei  $\omega = a$ .

Für konjugiert komplexe Polstellen: Peak nach *unten* bei  $\omega = a$  und *Abfall* von  $-40\text{dB}$  pro Dekade im Amplitudengang und  $-180^\circ$  im Phasengang bei  $\omega = a$ .

Für Funktionen mit  $\exp s$ -Termen: (Skript 13-1)

Form  $G(s) = \exp(\pm sT) \Rightarrow \angle G(j\omega) = \pm \omega T$ , somit ist die Phase eine Funktion von  $\omega$ .

## 10 Stabilität im Frequenzbereich

### 10.1 Bode Stabilitätskriterium

Wenn die Amplitude und Phase des Frequenzganges des *offenen* Regelkreises stetig abnehmend sind, dann ist der *geschlossene* Regelkreis stabil, falls  $|KG(j\omega)| < 1$  wo  $\angle G(j\omega) = -180^\circ$

### 10.2 Nyquist Stabilitätskriterium

geschlossener Kreis  $G_{cl} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} \quad F(s) = 1 + KG(s)$

offener Kreis  $G_{ol} = KG(s)$

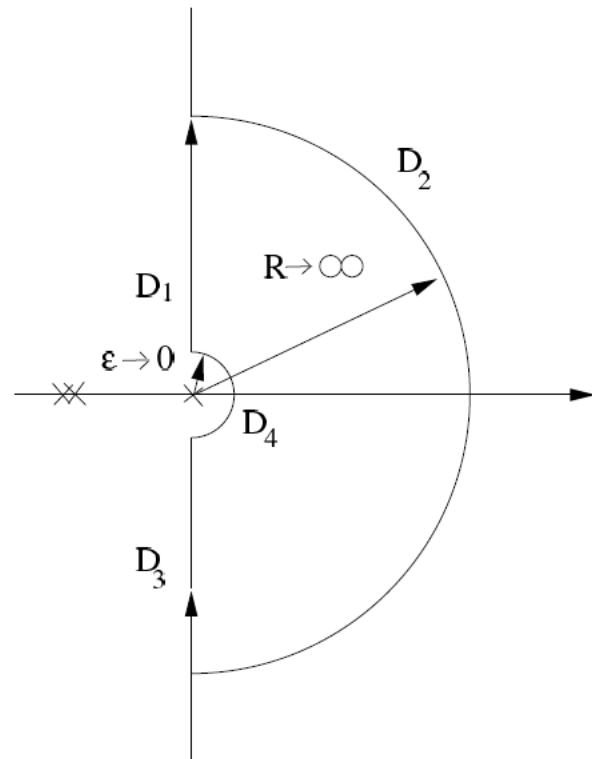
Der *geschlossene* Kreis ist stabil dann und nur dann wenn  $Z = 0$  oder  $N = -P$  und es gilt  $Z = N + P$

Dabei sind:

- $Z$  : Anzahl Nullstellen von  $F(s)$  in RHE = Anzahl Pole des geschlossenen Kreises  $G_{cl}(s)$  in RHE.
- $P$  : Anzahl Pole des offenen Kreises  $G_{ol}(s)$  in RHE.
- $N$  : Gesamte Anzahl der Umdrehungen des Ursprunges im Uhrzeigersinn durch  $\Gamma_F$ . (Umdrehungen gegen den Uhrzeigersinn werden negativ gezählt)
- $\Gamma_F$  : Abbildung der Kurve  $D$  unter der Funktion  $F(s)$

Abbildung von  $D_i$ :

- $D_2$  :  $\lim_{R \rightarrow \infty} F(Re^{j\theta})$ . Meistens Ursprung.
- $D_4$  :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(\epsilon e^{j\theta})$ . Meistens Halbkreis mit Radius  $1/\epsilon (\epsilon \rightarrow 0)$  mit  $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$
- $D_3$  : Aus dem Bodeplot für  $\omega < 0$
- $D_1$  : Aus dem Bodeplot für  $\omega \geq 0$



Modifikation der Abbildungsfunktion  $F(s) : D \xrightarrow{F(s)}$  Nyquistkurve:

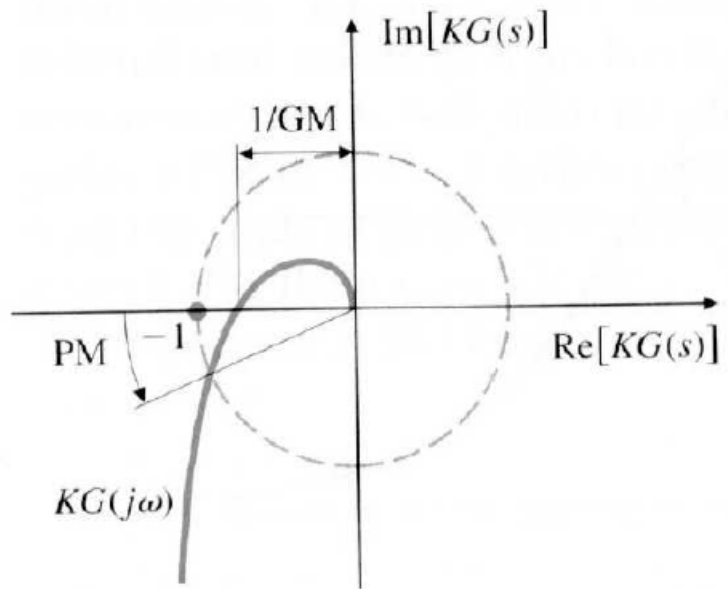
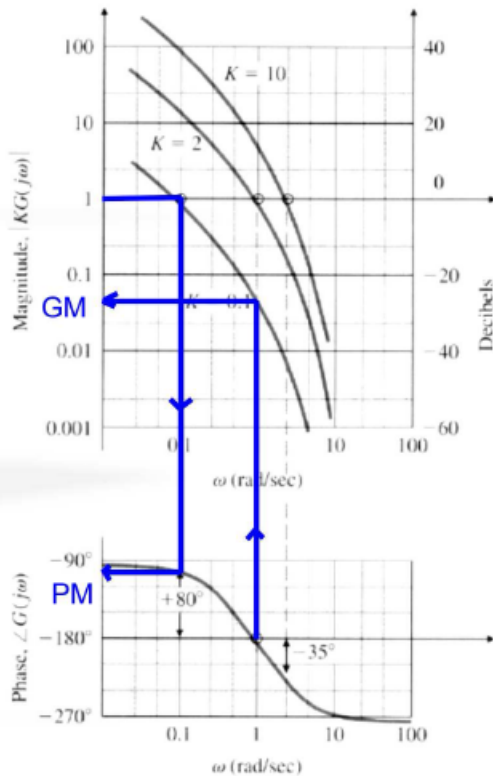
- $F(s) = 1 + KG(s) \Rightarrow$  Testpunkt  $(0, 0) \Rightarrow N =$  Anzahl Umdrehungen um  $(0, 0)$
- $F(s) = KG(s) \Rightarrow$  Abbildung von  $D$  wird unter  $F(s)$  verschoben um  $(-1, 0) \Rightarrow N =$  Anzahl Umdrehungen um  $(-1, 0)$
- $F(s) = G(s) \Rightarrow$  Abbildung von  $D$  wird unter  $F(s)$  verschoben um  $(-1, 1/K)$  und skaliert mit  $1/K \Rightarrow N =$  Anzahl Umdrehungen um  $(-1/k, 0)$

Beispiele dafür siehe 10-9 und 10-13

# 11 Stabilitätsmasse

## 11.1 Reservenfaktoren

Amplitudenreserve	Faktor, um den die Verstärkung der Strecke vergrößert werden muss, damit der Regelkreis "grenz stabil" wird, d.h. Faktor, um den der Betrag $ KG(j\omega) $ kleiner als 1 ist, wenn $\angle G(j\omega_U) = -180^\circ$ .
Phasenreserve	Betrag, um den die Phase der Strecke reduziert werden muss, damit der Regelkreis "neutral stabil" wird, d.h. Betrag, um den die Phase größer ist als $-180^\circ$ wenn $ KG(j\omega_C)  = 1$ . ( $\omega_C =$ Durchtrittsfrequenz)



## 11.2 GM und PM als Entwurfskriterien

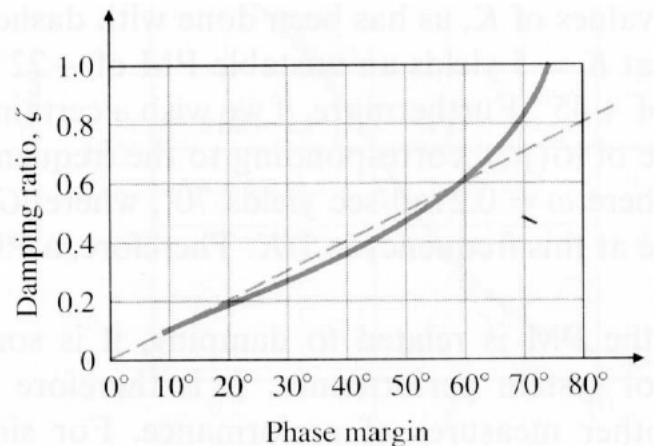
Annahme: Geschlossener Regelkreis verhält sich wie ein System 2. Ordnung

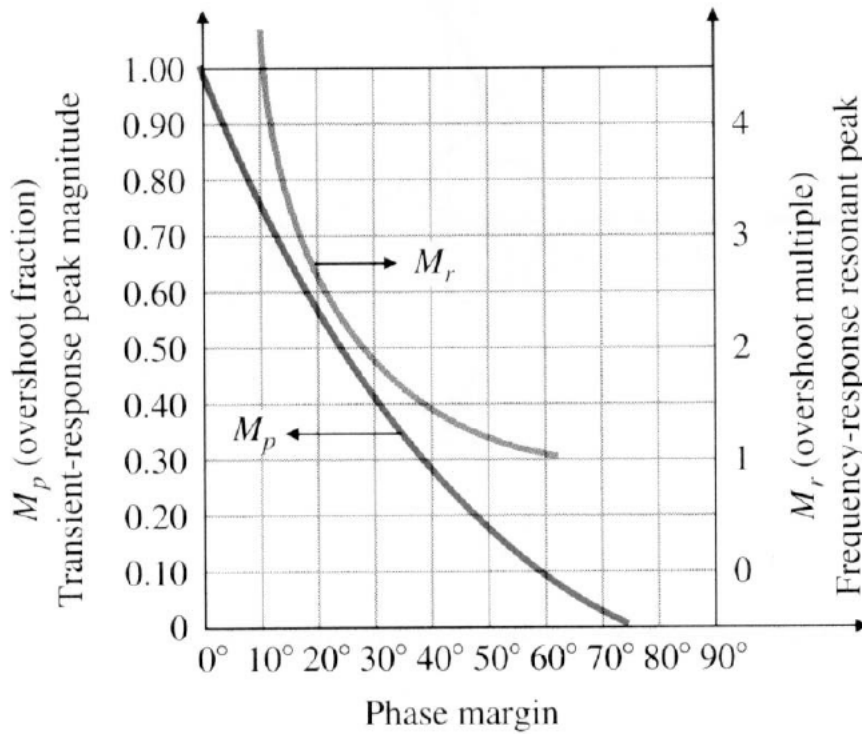
$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}$$

$$\Rightarrow KG(s) = \frac{\omega^2}{s(s + 2\xi\omega)}$$

$$\Rightarrow PM = \arctan\left(\frac{2\xi}{\sqrt{1+4\xi^2-2\xi^2}}\right)$$

$$\xi \approx \frac{PM}{100}$$





## 12 Dynamische Kompensatoren

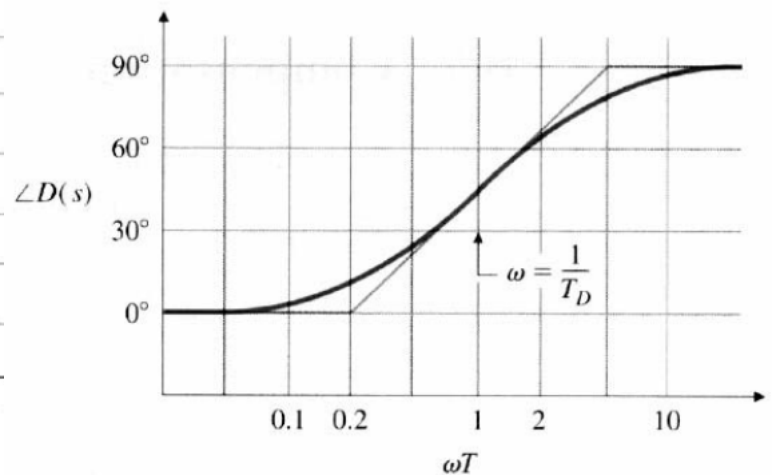
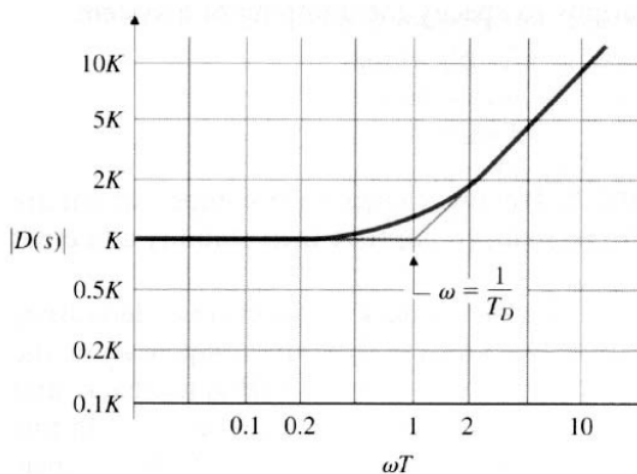
Idee Man hat verschiedene Spezifikationen gegeben und erhält dadurch Bedingungen für PM (siehe Kapitel "GM und PM als Entwurfskriterien"), meistens sind diese Bedingungen nicht erfüllt und es muss durch Serieschaltung eines Kompensator korrigiert werden.

Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  Frequenz beim Schnitt mit der 0dB-Achse.

### 12.1 PD-Kompensation

Übertragungsfunktion des Kompensators  $D(s) = K(T_D s + 1)$

Problem Keine Abflachung des Betrages nach  $\omega = 1/T_D$



## 12.2 Lead-Kompensation

ÜT des Kompensators  $D(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad \alpha < 1$

Max. Phasenhebung  $\omega_{max} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (1)$

Entwurf

Falls eine bestimmte Dämpfung  $\xi$  oder ein bestimmtes  $PM$  gefordert ist:

1. Umrechnen der Dämpfung  $\xi$  in  $PM$ :

$$PM = \arctan \left( \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi^4} - 2\xi^2}} \right)$$

$$PM \approx 100\xi \quad PM < 70^\circ$$

2. Zeichne das Bodediagramm des offenen Regelkreises  $KG(s)$

3. Ablesen der Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$ , wo  $|G(j\omega_C)| = 0dB$  und des ursprünglichen  $PM = PM_0$ :

$$PM_0 = \angle(G(j\omega))|_{\omega=\omega_C} - 180^\circ$$

4. Ausrechnen der noch zu kompensierenden Phase:  $\phi = PM - PM_0$

5. Ausrechnen der Parameters  $\alpha$ :

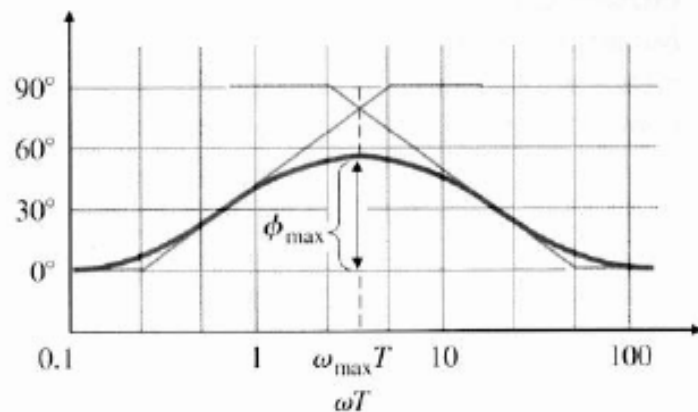
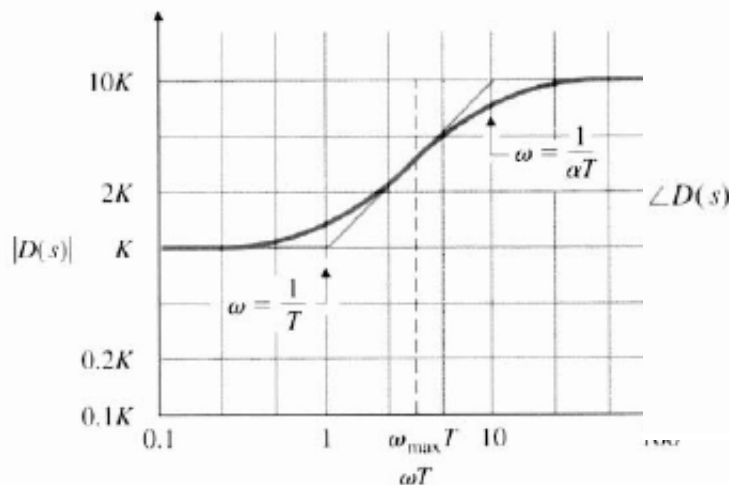
$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}$$

6. Ausrechnen des Parameters  $T$ :

i. man setzt  $\omega_{max} \approx \omega_C \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_C \sqrt{\alpha}}$

ii. berechnet  $T$  iterativ: schaut für einen bestimmtes  $T_0$ , ob  $PM$  erfüllt ist und wenn nicht vergrößert oder verkleinert man  $T$  solange bis die Spezifikationen für  $PM$  erfüllt sind.

iii. berechnet  $T$  iterativ mit Formel (1) bis sich  $T$  nicht mehr gross ändert



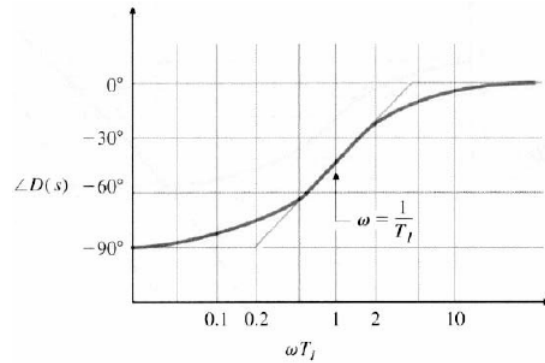
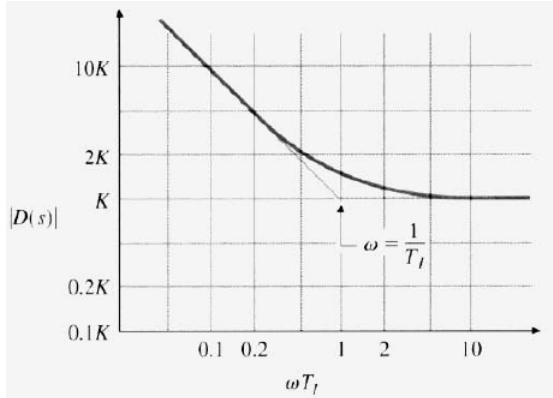
### 12.3 PI-Kompensation

Übertragungsfunktion des Kompensators  $D(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$

Man wählt  $1/T_I$  weit kleiner als  $\omega_C$ , um PM nicht zu beeinflussen.

Nachteile

Erhöht Betrag für kleine Frequenzen und erhöht damit bleibende Regelabweichung.



### 12.4 Lag-Kompensation

Übertragungsfunktion des Kompensators  $D(s) = \alpha \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} \quad \alpha > 1$

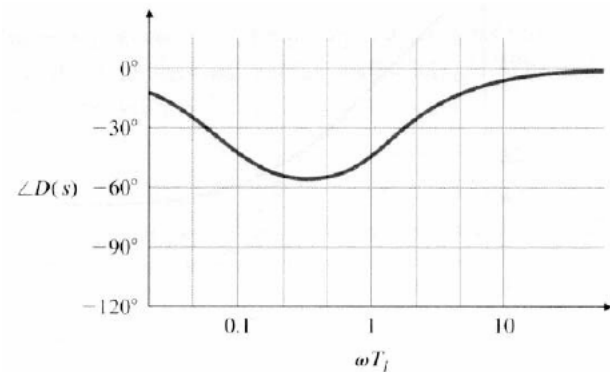
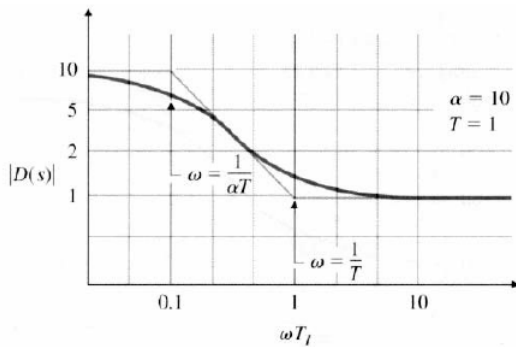
Spezialitäten

- zusätzliche Verstärkung um  $\alpha$  im niedrigen Frequenzbereich

- Man wählt  $1/T$  weit kleiner als  $\omega_C$  um PM nicht zu beeinflussen

Entwurf

Siehe Lead-Kompensator

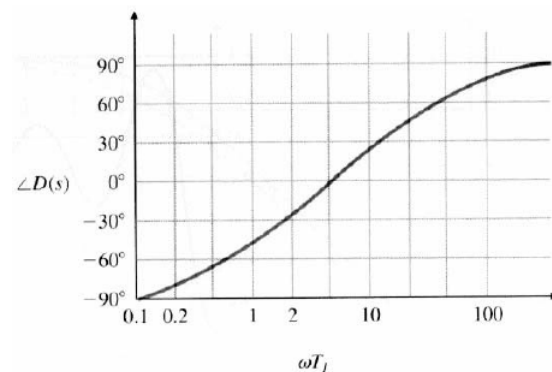
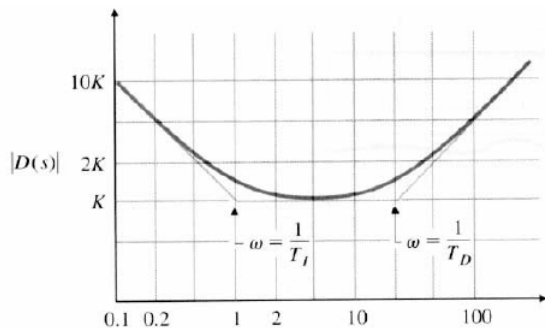


### 12.5 PID-Kompensation

Übertragungsfunktion des Kompensators  $D(s) = \frac{K}{s} \left[ (T_D s + 1) \left( s + \frac{1}{T_I} \right) \right]$

Spezialität

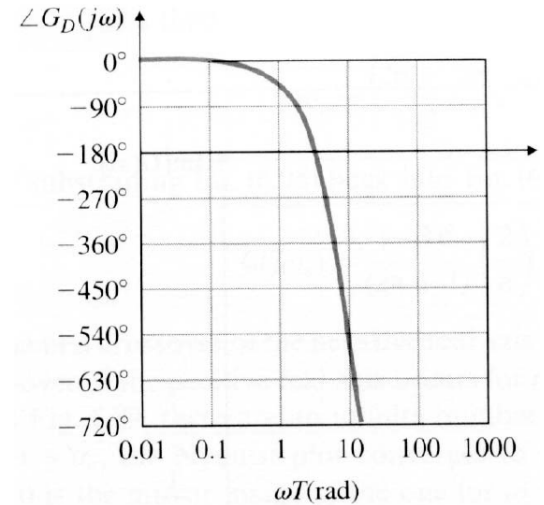
entspricht annähernd einer Serieschaltung von Lead und Lag.



## 13 Nicht minimalphasige Elemente

### 13.1 Totzeit

Totzeit	Zeitspanne zwischen Änderung am Systemeingang und Antwort am Systemausgang einer Regelstrecke.
Zeitbereich	$x_a(t) = x_e(t - T_t)$
Frequenzbereich	$G_D(s) = e^{-sT_t}$
	$\angle G_D(j\omega) = -\omega T_t$
	$\Rightarrow$ Umso grösser $\omega$ , umso grösser die Phasenverschiebung



Bemerkung: -  $\angle G(j\omega) > 270^\circ$  wenn  $\omega T_t > 5$  Stabilisierung unmöglich

- Für  $\omega_c > 4/T_t$  schwierig, da Phasenvorschub von  $> 90^\circ$  schwierig

$\Rightarrow$  Um Stabilisierung trotzdem zu erreichen muss an sich an folgendes Gesetz halten:

Für Systeme mit Totzeit  $T_t$  ist die erreichbare Bandbreite beschränkt auf etwa:

$$\omega \leq \frac{4}{T_t}$$

$\Rightarrow$  Einschränkung in der Reglergeschwindigkeit

### 13.2 Nullstelle in der RHE

Pade-Approximation der Totzeit 
$$e^{-sT_t} = \frac{e^{-sT_t/2}}{e^{+sT_t/2}} = \frac{1 - s\frac{T_t}{2} + \dots}{1 + s\frac{T_t}{2} + \dots} \approx \frac{1 - s\frac{T_t}{2}}{1 + s\frac{T_t}{2}}$$

Approximation gibt eine Nullstelle bei  $1/T_t$

Vergleich mit Allpass 
$$A(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}$$

$$T_t = 2T$$

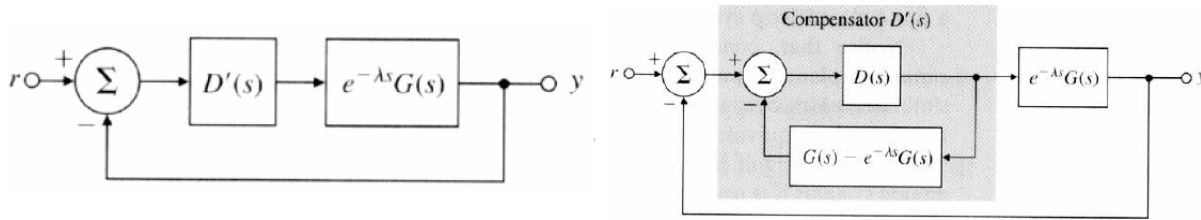
Bandbreitengesetz

Wenn man  $T_t = 2T$  einsetzt in Gesetz vom vorherigen Kapitel ergibt sich:

Bandbreite beschränkt auf etwas:

$$\omega \leq \frac{2}{T}$$

### 13.3 Totzeitkompensator



Idee Rückführung des Reglers vor dem Totzeitglied anbringen, sodass sich Totzeit in der char. Gleichung wieder kürzt.

Übertragungsfunktion  $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)} e^{-\lambda s}$

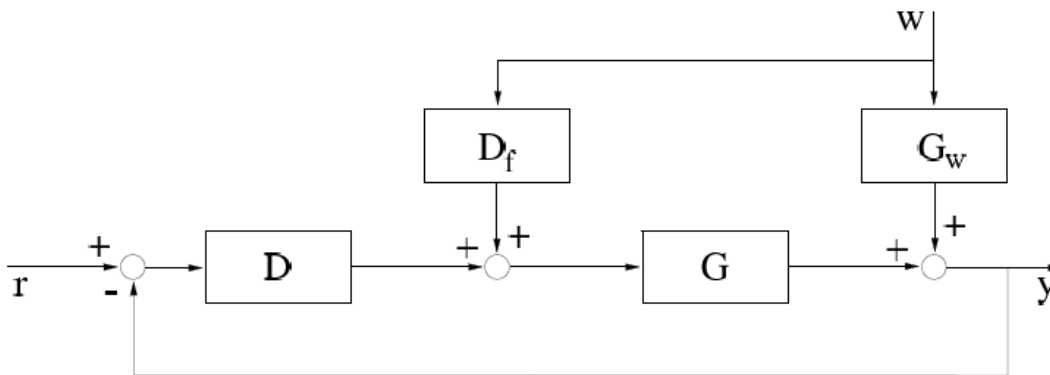
Char. Gleichung  $1 + D(s)G(s)$

Totzeit  $\lambda$  in char. Gleichung nicht vorhanden!

⇒ Ganze Übertragungsfunktion ist zwar immer noch totzeitbehaftet, nicht jedoch das Feedback (char. Gleichung)

## 14 Erweiterung der Regelungsstruktur

### 14.1 Störgrössenaufschaltung (Feedforward Control)



Problem Rückführung reagiert erst, wenn Störung  $w$  die Regelgrösse  $y$  bereits verändert hat.

Lösung Störgrössenaufschaltung reagiert bevor  $w$  die Regelgrösse  $y$  (stark) geändert hat.

$$y = \frac{DG}{1 + DG}r + \frac{D_fG + G_w}{1 + DG}w$$

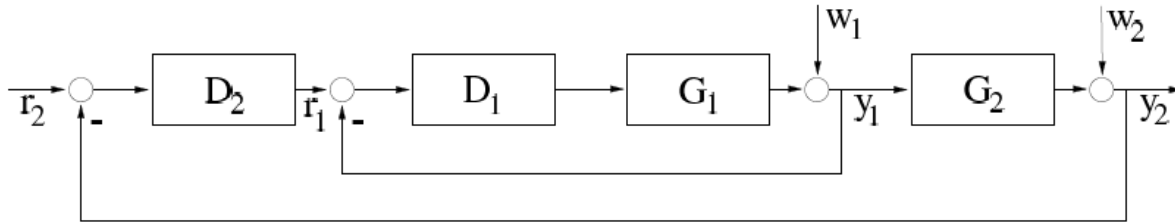
Wähle  $D_f = -G_w/G$  (perfekte Kompensation). Dies ist jedoch nicht möglich wenn:

- $G$  Nullstellen in der RHE hat
- $G$  eine grössere Totzeit hat als  $G_w$

Abhilfe Approximiere  $D_f$  durch eine realisierbare stabile ÜF

- Verlege die Pole der RHE in LHE (dadurch verändert sich die Phase, nicht aber die Amplitude der ÜF)
- Vernachlässige die "negative Totzeit" ( $e^{+s} \rightarrow 1$ )

## 14.2 Kaskadenregelung



Idee Über die Hilfsgrösse  $y_1$  kann der Einfluss der Störung  $w_1$  im inneren Regelkreis schnell ausgeregelt werden.

Der äussere Regelkreis hat als Stellgrösse den Sollwert für den inneren Regelkreis und regelt damit  $y_2$

Entwurf Annahme:  $G_2$  ist langsam im Vergleich zu  $G_1$

- 1 Lege  $D_1$  so aus, dass die Störung  $w_1$  weitgehend ausgeregelt ist.
- 2 Fasse den inneren Kreis zusammen
- 3 Entwurf des äusseren Reglers: Lege  $D_2$  für gutes Verhalten von  $y_2$  aus. Nehme dabei den inneren Kreis als statisch an ( $y_1 = r_1$ ), gilt aufgrund der Annahme.

## 15 Mehrvariablenregelung

### 15.1 Regelkreisstrukturen

Mehrvariablensystem Wenn mehr als eine Stellgrösse zur Regelung mehr als einer Regelgrösse benützt wird.

Mehrgrössenregelkreis Regler berücksichtigt alle Messgrössen und Koppelungen

Mehrschlaufenregelung Denzentrale Regelung: Jede Schlaufe regelt nur eine Eingangs-Ausgangs-Beziehung

Einschlaufenregelung Koppelungen werden vernachlässigt, Vorgehen wie bei SISO-Systemen.

Entkoppelung Ein Entkoppelungskompensator wird vor das System geschaltet. Anschliessend wird wie beim Einschlaufenregler vorgegangen.

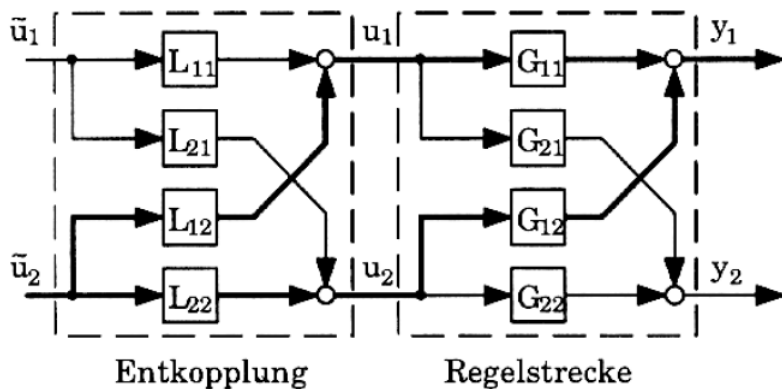
15.2 Beispiel zum Mischtank (15-6 bis 15-9)

15.3 Kopplungsmass: Relativ Gain Array

Kopplungsmass	gibt an wie gross der Einfluss der Eingänge auf die Ausgänge ist
Relative Gain Array (RGA)	Das Kopplungsmass ist eine Matrix $M$ : $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ Regel: Zeilen und Spaltensumme ergibt jeweils 1
Berechnungsmethode 1	Systemmatrix $G$ : $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ $m_{11} = \frac{g_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$ $m_{12} = m_{21} = -\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$
Berechnungsmethode 2	Funktioniert auch ganz leicht für Systeme mit mehr als 2 Eingängen und Ausgängen. Man muss die Inverse Matrix zu $G$ berechnen: $G^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} \end{pmatrix}$ (RGA): $m_{ij} = g_{ij}\hat{g}_{ji}$

Bemerkung Falls  $m_{12}$  und somit  $m_{21}$  Null sind, ist das System vollständig entkoppelt

15.4 Entkopplungskompensator



Das System ist entkoppelt für:  $y = GHu'$ , wobei: (Man muss  $GH$  zu einer Diagonalmatrix machen)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow GH = \begin{pmatrix} g_{11} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{22}} & 0 \\ 0 & g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}} \end{pmatrix}$$

## 16 Zustandsraumdarstellung

### 16.1 Normalformen

$$\text{ZSR} \rightarrow \mathcal{L} \quad Y = C(sI - A)^{-1}BU + DU$$

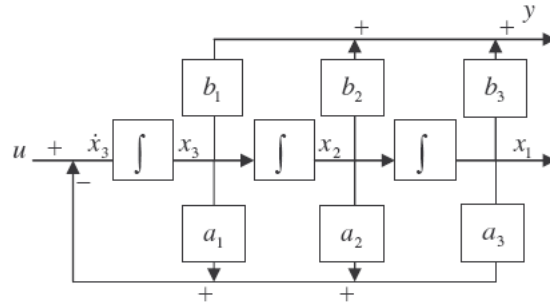
$\mathcal{L} \rightarrow \text{ZSR}$  Ist **nicht** eindeutig, es gibt für eine Übertragungsfunktion  $G(s)$  **unendlich** viele Möglichkeiten diese im Zustandsraum darzustellen.

#### Regelungsnormalform

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad b_S = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_S^T = [b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1]$$

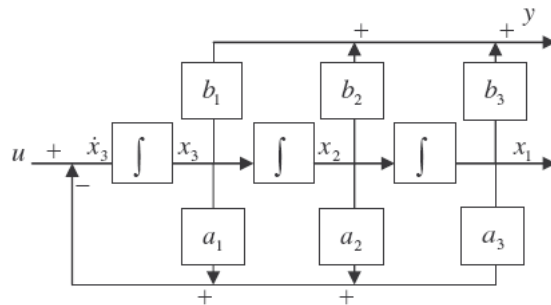


#### Regelungsnormalform

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \quad b_B = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = [0, \dots, 0, 1]$$



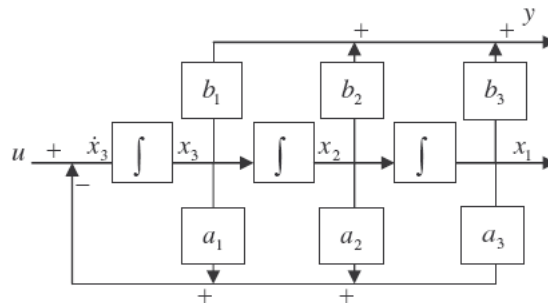
#### Modalform

$$G(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \dots$$

Voraussetzung:  $\lambda_i$  reell und einfach

$$A_M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad b_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_M^T = [c_1, \dots, c_n]$$



Annahme Die Eigenwerte von  $A$   $\lambda_i$  sind alle reell und einfach

Problem Komplexe konjugierte Pole:

Stelle jedes komplexe Polpaar in der Regelungsnormalform dar.

Mehrfache Pole:

Stelle jede Gruppe von mehrfachen Polen in Jordanform dar

Jordanform	
$G_J(s) = \frac{c}{(c - \lambda)^n}$	$G_J(s) : \text{Jordanblock}$
$A_J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$b_J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$c_J^T = [c, 0, \dots, 0, 0]$	

## 16.2 Zustandstransformation

Man will von einem Zustand  $x$  in den Zustand  $z$  wechseln:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + Gu & x &\xrightarrow{T} z & \dot{z} &= Az + Bu \\ y &= Hx + Ju & & & y &= Cz + Du \end{aligned}$$

Die neuen Matrizen berechnen sich zu:

$A = T^{-1}FT$
$B = T^{-1}G$
$C = HT \quad C = J$

### Steuerbarkeitsmatrix und Überführung in Regelungsnormalform

**Steuerbarkeit** Ein System heisst *steuerbar*, falls ein Zustand aus allen möglichen Anfangswerten durch geeignete Wahl des Eingangssignals  $u$  in endlicher Zeit  $t$  in den Ursprung gesteuert werden kann.

**Steuerbarkeitsmatrix** Falls die Matrix  $Q_S$  regulär ist, d.h.  $\text{Det}(Q_S) \neq 0$ , ist das System  $(A, b, c)$  steuerbar:

$$Q_S = [b, Ab, A^2b, A^3b, \dots, A^{n-1}b]$$

**Überführung Normalform** Um ein System  $(A, b, c)$  in die Regelungsnormalform zu bringen benutzt man die Transformationmatrix  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} q^T \\ q^T A \\ q^T A^2 \\ \vdots \\ q^T A^{n-1} \end{pmatrix} \quad q^T : \text{letzte Zeile von } Q_S^{-1}$$

$$\Rightarrow [A, b, c^T] \rightarrow [P^{-1}AP, P^{-1}b, c^T P] = [A_S, b_S, c_S^T]$$

## Beobachtungsmatrix und Überführung in Beobachternormalform

Beobachtbarkeit Ein System ist *beobachtbar*, wenn der Anfangszustand  $x(t)$  aus dem gemessenen Ausgangssignal  $y(t)$  berechnet werden kann.

Steuerbarkeitmatrix Falls die Matrix  $Q_B$  regulär ist, d.h.  $\text{Det}(Q_B) \neq 0$ , ist das System  $(A, b, c)$  beobachtbar:

$$Q_B = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

Überführung Normalform Um ein System  $(A, b, c)$  in die Beobachtungsnormalform zu bringen benutzt man die Transformationmatrix  $T$ :

$$T = [q, Aq, A^2q, \dots, A^{n-1}q] \quad q : \text{letzte Spalte aus } Q_B^{-1}$$

$$[A, b, c^T] \rightarrow [T^{-1}AT, T^{-1}b, c^T T] = [A_B, b_B, c_B^T]$$

## Überführung in Modalform und Beobachtbarkeit, Steuerbarkeit

Überführung in Normalform Die Überführung eines System  $(A, b, c)$  in Modalform ergibt sich durch:

$$A_M = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad B_M = T^{-1}b \quad C_M = c^T T$$

$$T = [t_1, t_2, \dots, t_n] \quad t_i : \text{Eigenvektor von } A$$

Spezielles

- Wenn  $b_i = 0$  ist der Zustand  $x_i$  nicht steuerbar
- Wenn  $c_i = 0$  ist der Zustand  $x_i$  nicht beobachtbar

## 16.3 Verlust der Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit

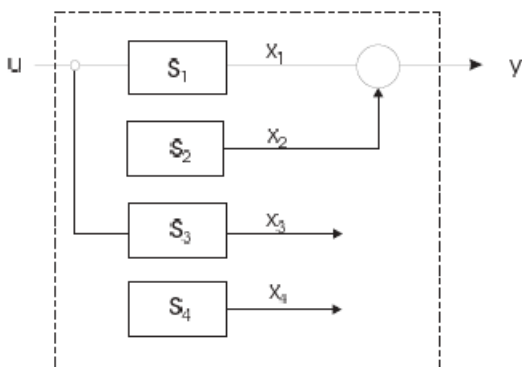
Pol-Nullstellenkürzung in  $G(s) \Leftrightarrow$  Verlust der Steuerbarkeit oder der Beobachtbarkeit im ZSR

Kürzt sich ein Pol mit einer Nullstelle, so werden die Determinanten der Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitsmatrix Null.

## 16.4 Zerlegung nach Kalman

Durch entsprechende Zustandstransformation kann man jedes System in (nicht) steuerbare, (nicht) beobachtbare Untersysteme zerlegt werden:

$$\begin{array}{l} \text{steuer- und beobachtbar} \\ \text{nicht steuerbar} \\ \text{nicht beobachtbar} \\ \text{weder noch} \end{array} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y = (C_1, C_2, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$



## 16.5 Eigenwerte und Pole

Alle Pole der ÜF  $g(s)$  sind Eigenwerte der Matrix  $A$

$$\det(sI - F) = 0 \Rightarrow \text{Eigenwerte von } A$$

Aber Wegen möglicher Kürzungen sind nicht alle Eigenwerte von  $A$  auch Pole von  $g(s)$ !

## 16.6 Nullstellen in der Zustandsraumdarstellung

Annahme  $z$  eine Nullstelle von  $G(s)$

Es gilt: Für den Eingang  $u(t) = u_0 e^{zt}$  ist bei entsprechenden Anfangsbedingungen der Ausgang  $y(t) \equiv 0, t > 0$

Mit diesen Eigenschaften lassen sich die Nullstellen entsprechend finden durch:

$$\det \begin{pmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$$

## 17 Reglerentwurf im Zustandsraum

### 17.1 Zustandsrückführung

Idee Führe den Zustand (anstelle des Ausgangs) zurück. Wähle die Elemente der Rückführungsmatrix so, dass die Pole auf gewünschte Stellen verschoben werden.

$$u = -Kx \Rightarrow \dot{x} = Fx + Gu = (F - GK)x$$

Vorgehen Vergleiche die char. Gleichung  $\det(sI - (F - GK)) = 0$  mit  $s^2 + 2\xi\omega_N s + \omega_N^2$  wobei  $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  ist.

Die Wahl von  $K$  ist besonders einfach, wenn das System in Regelungsnormform vorliegt:

$$\Rightarrow A_S - B_S K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & \cdots & \cdots & -a_1 - k_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{char. Gleichung: } s^n + (a_1 + k_n)s^{n-1} + (a_2 + k_{n-1})s^{n-2} + \cdots + (a_n + k_1) = 0$$

#### Schlussfolgerungen

- Für ein *steuerbares* System lassen sich die Pole durch die Wahl von  $K$  beliebig platzieren.
- Nähern sich die Nullstelle den Polen (das System nähert sich einem nicht steuerbaren System), so werden die  $k_i$  sehr gross, d.h. die Pole lassen sich nur noch schwer verstellen
- Wenn sich die Bandbreite  $\omega_N$  des geschlossenen Systems vergrößert, nehmen die  $k_i$  zu.

## 17.2 Referenzsystem

Problem Zustandsrückführung kaum realisierbar, aufgrund:

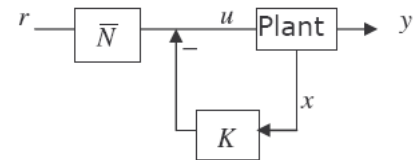
- Alle Zustände müssen bekannt (messbar) sein. Dies ist oft nicht der Fall.
- Das bisherige System war ein P-Regler, d.h. es bleibt ein Regelfehler.
- Bisher wurde kein Sollwert berücksichtigt, d.h. der Regler ist nutzlos

Sollwert  $r$  Ansatz:  $u = u_{SS} - K(x - x_{SS}) \rightarrow$  stat. Betrachtung, d.h.  $\dot{x} = 0$

Vorgehen 1. Berechne  $K$  gemäss den Regeln der Zustandsrückführung

$$2. \text{ Berechne } \begin{pmatrix} N_x \\ N_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ Berechne } \bar{N} = N_u + KN_x$$



## 17.3 Integralregelung

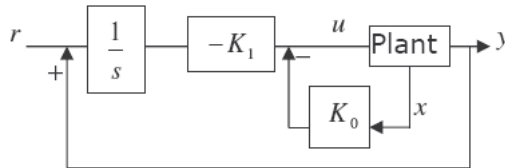
Idee Integralregelung eliminiert den bleibenden Regelfehler

Altes System  $\dot{x} = Ax + Bu$

$$y = Cx$$

Neuer Zustand  $\dot{x}_I = Cx - r = e \Rightarrow x_I = \int_0^t edt$

$$\text{Neues System } \begin{pmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_I \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r \quad (1)$$



Vorgehen Um einen Regler mit Integralanteil zu berechnen:

1. Übertragungsfunktion berechnen
2. Systemmatrizen aufstellen
3. Vorgaben berücksichtigen
4. System-DGL aufstellen: (nach Gleichung 1)
5. Koeffizientenvergleich

## 17.4 Zustandsschätzung

Idee Oft sind nicht alle Zustände messbar und müssen daher geschätzt werden:

$$u = -K\hat{x} + \bar{N}r \quad \hat{x} : \text{Schätzung von } x$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu$$

Problem Fehler:  $\tilde{x} = x - \hat{x}$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Fx + Gu - F\hat{x} - Gu = F(x - \hat{x}) = F\tilde{x}$$

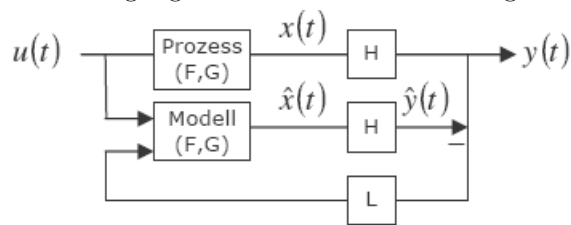
$\Rightarrow$  Fehlerkonvergenz abhängig von  $F$ : vielleicht langsam oder instabil.

Lösung Fehlerkorrektur mittels Rückführung des Schätzfehlers  $y - C\hat{x}$ :

Beobachter von  $x$  :  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \underbrace{L}_{\text{Fehlerkorrektur}} (y - C\hat{x})$

$$\Rightarrow \text{Fehlerdynamik: } \dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - LC(x - \hat{x}) = (A - LC)\tilde{x}$$

$\Rightarrow$  Durch geeignete Wahl von  $L$  können Eigenwerte der Matrix  $(A - LC)$  platziert werden.



Vorgehen Setze mittels Koeffizientenvergleich  $\det(sI - (A - LC)) = \text{char. Polynom}$

Besonders einfach ist die Wahl von  $L$ , falls das System in der Beobachtungsnormalform vorliegt:

$$A - LC = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n - l_1 \\ 1 & \cdots & 0 & -a_{n-1} - l_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 - l_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Char. Gleichung: } s^n + (a_1 + l_n)s^{n-1} + (a_2 + l_{n-1})s^{n-2} + \cdots + (a_n + l_1) = 0$$

Schlussfolgerung: Für ein beobachtbares System lassen sich die Pole durch die Wahl von  $L$  beliebig platzieren.

## 17.5 Dualität

Die Zustandsregelung sowie der Beobachterentwurf sind äquivalent:

Regelung:	Beobachter:
$A - BK$	$A - LC$
$\lambda_i(A - BK) = \lambda_i(A^T - C^T L^T)$	
$(A, C) \text{ beobachtbar} \Leftrightarrow (A^T, C^T) \text{ steuerbar}$	

## 17.6 Zustandsrückführung mit Beobachter

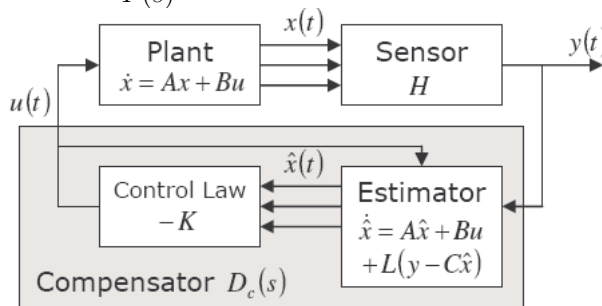
Idee Benütze denn geschätzten Zustand in der Zustandsregelung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BK\hat{x} = Ax - BK(x - \tilde{x}) \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eigenwerte Die Eigenwerte des Zustandsreglers und des Beobachters können unabhängig voneinander bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - F + LC \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \det(sI - A + BK) \cdot \det(sI - F + LC) &= \alpha_C(s)\alpha_E(s) = 0 \end{aligned}$$

Übertragungsfunktion  $D_C(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$



**Separationsprinzip:** Menge der Pole des Gesamtsystems = Pole des Zustandsreglers + Pole des Beobachters.

Fazit:  $L, K$  können unabhängig voneinander gewählt werden.

Zustandsregler + Beobachter = Dynamischer Kompensator