

# Analysis III Zusammenfassung

Roman Bosshard, 4. Februar 2008

## 1 Rechnen in Koordinaten

### 1.1 Koordinatisierungen

Eine Koordinatisierung  $(M, U, \vec{r})$ , mit  $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, ist eine unendlich oft stetig differenzierbare bijektive Abbildung  $\vec{r} : U \rightarrow M$  mit unendlich oft stetig differenzierbarer Inversen (d.h.  $\vec{r}$  ist ein unendlichfacher Diffeomorphismus).

Für die Kugelkoordinaten ist  $\vec{r}$  die Abbildung

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x(r, \theta, \varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Und die Teilmengen  $U$  und  $M$  von  $\mathbb{R}^3$  sind

$$M = \mathbb{R}^3 \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y = 0 \}$$

$$U = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

### 1.2 Koordinatenbasisvektoren

Für eine Kurve  $\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$  werden die  $n$  Koordinatenbasisvektoren wie folgt bestimmt:

$$\vec{e}_k = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_k}$$

Die Basisvektoren  $\vec{e}_k$  spannen den Tangentialraum an  $\vec{\gamma}$  auf.

### 1.3 Kurvenlänge und metrische Matrix

$$\text{Länge}[\vec{\gamma}] = \int_a^b |\dot{\vec{\gamma}}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\vec{\gamma}}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle} dt$$

Hierfür wird das Skalarprodukt des Tangentialvektors mit sich selbst benötigt.

$$\langle \dot{\vec{\gamma}}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle = \sum_{i,j=1}^n \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$$

Die Skalarprodukte der Koordinatenbasisvektoren bezeichnet man als metrische Koeffizienten, die zugehörige Matrix als metrische Matrix.

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Die Determinante der metrischen Matrix hängt mit dem Betrag des Normalenvektors und der Determinanten der Jacobischen Matrix  $J$  zusammen

$$\sqrt{|\det([g_{ij}])|} = |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = \det(J)$$

### 1.4 Normalenvektor und Flächenelement

Der Normalenvektor an eines parametrisierten Flächenstücks mit Koordinatenbasisvektoren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  berechnet sich als

$$\vec{N} = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$

Die Fläche von  $M$  berechnet man mit Flächenelement ergibt sich durch  $\text{Fläche}[M] = \int_M 1 dM$  mit dem Flächenelement

$$dM = |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| dy_1 dy_2 = \sqrt{\det([g_{ij}])} dy_1 dy_2$$

Und das Integral der skalaren Funktion  $f(y_1, y_2)$  lässt sich dann berechnen durch

$$\int_M f dM = \int_U f \sqrt{\det([g_{ij}])} dy_1 dy_2$$

## 1.5 Divergenz und Laplace-Operator

Die Divergenz eines Vektorfelds  $\vec{V}$  beträgt

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{1}{\sqrt{\det([g_{ij}]})} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ \sqrt{\det([g_{ij}]}) V_i \right]$$

Für den Laplace-Operator  $\Delta$  benötigt man die inverse metrische Matrix  $g_{ji}$ , welche sich im Fall einer Symmetrischen Matrix  $g_{ij}$  einfach berechnen lässt, indem man die Kehrwerte der Diagonalelemente nimmt.

$$[g_{ji}] = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Für 2x2-Matrizen gilt ausserdem folgende einfache Beziehung zur Bestimmung der Inversen:

$$[g_{ji}] = \frac{1}{\det([g_{ij}])} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Der Laplace-Operator berechnet sich dann mit

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{\det([g_{ij}])}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ \sqrt{\det([g_{ij}])} g_{ji} \frac{\partial}{\partial y_j} \right]$$

Achtung: Bei  $g_{ji}$  handelt es sich um die Elemente der inversen metrischen Matrix!

## 1.6 Koordinatentransformation

### 1.6.1 Jacobi-Matrix

Beim Wechsel von einer Koordinatisierung  $(M, U, \vec{r})$  in eine neue Koordinatisierung  $(M, \tilde{U}, \tilde{\vec{r}})$  berechnet man die Beziehung zwischen den partiellen Ableitungen über die Jacobi-Matrix.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} \end{bmatrix} = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_n} \end{bmatrix}$$

Die partiellen Ableitungen berechnen sich dann durch

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \right] = J \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \quad \text{bzw.} \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = J^{-1} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \right]$$

### 1.6.2 Polar- und Zylinderkoordinaten

$U = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$  und  $\sqrt{\det([g_{ij}])} = r$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix}$$

### 1.6.3 Kugelkoordinaten

$U = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  und  $\sqrt{\det([g_{ij}])} = r^2 \cdot \sin(\theta)$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$U = (0, \infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$  und  $\sqrt{\det([g_{ij}])} = r^2 \cdot \cos(\theta)$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

## 2 Fourierreihen

### 2.1 Definition

Eine periodische Funktion  $f(x)$  mit Periode  $T$  lässt sich schreiben als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cdot \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \cdot \sin \frac{2\pi nx}{T} \right]$$

Die Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \cos \frac{2\pi nx}{T} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \sin \frac{2\pi n x}{T} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Fourierreihe lässt sich auch komplex schreiben als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{2\pi}{T} i n x} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cdot e^{-\frac{2\pi}{T} i n x} dx$$

### 3 Distributionen

Distributionen sind verallgemeinerte Funktionen der Form

$$T : \varphi \mapsto (T, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} t(x) \varphi(x) dx$$

Sie gewichten eine Messfunktion  $\varphi(x)$  durch eine Funktion  $t(x)$ . Beispiele sind die Heaviside-Distribution oder die Dirac-Distribution

$$(H, \varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

$$(\delta, \varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

Distributionen sind linear, das heisst es gilt

$$(T, a\varphi + b\psi) = a(T, \varphi) + b(T, \psi)$$

#### 3.1 Distributionsableitung

Für eine Distribution  $T$  gilt für beliebige Testfunktionen  $\varphi$

$$(T', \varphi) = -(T, \varphi')$$

und für höhere Ableitungen

$$(T^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (T, \varphi^{(n)})$$

## 4 Partielle Differentialgleichungen

### 4.1 Eigenschaften von PDEs

Die allgemeine Form einer linearen homogenen PDE 2. Ordnung ist

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

Wobei nur der symmetrische Anteil der Koeffizienten behandelt werden muss. Die Koeffizientenmatrix  $[a_{ij}]$  wird nötigenfalls symmetrisiert durch  $[\tilde{a}_{ij}] = \frac{1}{2}([a_{ij}] + [a_{ij}]^T)$ .

#### 4.1.1 Linearität und Superpositionsprinzip

Die PDE ist linear, wenn die Koeffizienten  $[a_{ij}]$  und  $[b_i]$  möglicherweise von den Variablen, aber nicht von der Funktion  $u$  selbst abhängen. Ausserdem kommen keine Potenzen von  $u$  und Ableitungen von  $u$  vor.

**Superpositionsprinzip:** Genügen  $u_0, u_1, \dots$  derselben homogenen linearen PDE sowie denselben homogenen linearen Nebenbedingungen, so besitzt auch die Reihe

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i u_i \quad (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

(sofern sie konvergiert) diese Eigenschaft.

#### 4.1.2 Quasilinearität

Eine PDE heisst quasilinear, wenn die Koeffizienten  $[a_{ij}]$  und  $[b_i]$  von den Variablen und der Funktion  $u$  selbst abhängen, aber nicht von Ableitungen von  $u$ . Ausserdem kommen wiederum keine Potenzen von  $u$  und Ableitungen von  $u$  vor. Die PDE hat also die Form

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

#### 4.1.3 Klassifizierung in elliptisch, hyperbolisch und parabolische PDE

Die PDE kann wie folgt klassifiziert werden:

- **elliptisch:** Die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $[a_{ij}]$  sind entweder alle positiv oder alle negativ.
- **hyperbolisch:** Die Matrix  $[a_{ij}]$  hat sowohl positive als auch negative Eigenwerte  $\lambda_i$ , jedoch kein  $\lambda_k = 0$ .
- **parabolisch:** Nach einer Variable wird nur einmal abgeleitet, nach allen anderen zweimal. Ausserdem verschwindet genau ein Eigenwert der Matrix  $[a_{ij}]$  und alle anderen Eigenwerte sind entweder alle positiv oder alle negativ. In kartesischen Koordinaten gilt ausserdem, dass der zugehörige Eigenvektor  $\vec{E}$  zum Eigenwert  $\lambda_i = 0$  nicht senkrecht auf  $\vec{B}$  steht, also  $\langle \vec{N}, \vec{B} \rangle \neq 0$ .

### 4.2 Methode der Charakteristiken

Quasilineare PDEs 1. Ordnung können mit der Methode der Charakteristiken gelöst werden.

Die Fläche  $z = u(x, y)$  wird als Integralfläche in  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst. Daher wird sie parametrisiert durch  $\vec{r} = (x, y, u(x, y))$  und die Funktionsgleichung der Integralfläche lautet  $\varphi(x, y, z) := u(x, y) - z = 0$ . Die Flächennormale ist dann

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus der Differentialgleichung folgt, dass das charakteristische Vektorfeld  $\vec{ch} = (a, b, c)$  in jedem Punkt der Integralfläche ein Tangentialvektor der Integralfläche ist, denn  $\langle \vec{n}, \vec{ch} \rangle = 0$ . Als Charakteristik bezeichnet man eine Kurve  $\gamma(t)$ , wenn gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x, y, u) \\ b(x, y, u) \\ c(x, y, u) \end{pmatrix}$$

Dies ist ein System von ordentlichen Differentialgleichungen, dessen Lösung mehrere Integrationskonstanten enthält. Um diese zu bestimmen, muss für jede Charakteristik genau ein Punkt vorgegeben sein. Eine Randbedingung hat also z.B. die Form  $u(x_0, y) = f(y)$ , wobei f eine beliebige Funktion darstellt. Die Randbedingung wird als Kurve auf der Integralfläche parametrisiert durch  $\Gamma(s) = (x_0, s, f(s))$  (Bem.:  $\Gamma$

muss einzig die Bedingung erfüllen, dass der Schnittwinkel mit den Charakteristiken nie Null ist.). Es soll jetzt für alle Charakteristiken  $\gamma_s(t)$  gelten

$$\gamma_s(0) = \Gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0 \\ s \\ f(s) \end{pmatrix}$$

Daraus lassen sich die Integrationskonstanten bestimmen. Jetzt müssen nur noch die eingeführten Parameter  $s$  und  $t$  eliminiert und  $u(x, y)$  bestimmt werden, was leicht mit folgender Gleichung geschehen kann:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u(x, y) \end{pmatrix} = \gamma_s(t)$$

### 4.3 Lösung von PDEs durch Separationsansatz

Oft können PDEs durch einen Separationsansatz gelöst werden. Dabei nimmt man an, dass sich die gesuchte Funktion  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  als Produkt von  $n$  Teilfunktionen, die jeweils nur von einer Variablen abhängen, schreiben lässt:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = X_1(x_1) \cdot X_2(x_2) \cdot \dots \cdot X_n(x_n)$$

Dieser Lösungsansatz wird in die Differentialgleichung eingesetzt und nach Teilen durch den Ansatz hat die Gleichung nun die Form

$$\underbrace{\frac{\frac{d^{k_1}}{dx_1^{k_1}} X_1(x_1)}{X_1(x_1)}}_{=: \lambda_1} + \underbrace{\frac{\frac{d^{k_2}}{dx_2^{k_2}} X_2(x_2)}{X_2(x_2)}}_{=: \lambda_2} + \dots + \underbrace{\frac{\frac{d^{k_i}}{dx_i^{k_i}} X_i(x_i)}{X_i(x_i)}}_{=: \lambda_n} = C$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass jeder der  $n$  Quotienten einer reellen Konstante  $\lambda_i$  entspricht, deren Summe durch  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = C$  bestimmt ist. Die PDE lässt sich daher umformen in ein System von  $n$  ODEs der Form

$$\frac{\frac{d^{k_i}}{dx_i^{k_i}} X_i(x_i)}{X_i(x_i)} = \lambda_i$$

Auflösen dieses Systems führt auf die  $n$  Teilfunktionen  $X_i(x_i)$ , die Funktion  $u$  ergibt sich dann aus dem Einsetzen der Teilfunktionen in den Ansatz. (Bem.:  $\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = K = \pm \omega^2$  wird nur periodisch, falls  $K = -\omega^2$ . Dann lautet die allg. Lösung  $X(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$ , anderenfalls  $X(x) = A \sinh(\omega x) + B \cosh(\omega x)$ .)

## 4.4 Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = D\Delta u \text{ (parabolisch)}$$

### 4.4.1 Lösungsstrategie

$$\begin{cases} u_t = D\Delta u & (i) \\ u(x, t) = u(L, t) = 0 & (ii) \\ u(x, 0) = u_0(x) & (iii) \end{cases}$$

1. Finde eine Basislösung mit Hilfe des Separationsansatzes.
2. Superponiere die Basislösungen und erfülle die Randbedingungen.

Sollte das Problem inhomogene Randbedingungen haben, also (ii) lautet z.B.  $u(0, t) = u_a$  und  $u(L, t) = u_b$ , finde eine stationäre Lösung  $u^*(x)$ , welche (ii) erfüllt (es ist dann  $u_t^* = 0 = D\Delta u^*$ ). Setze dann  $u(x, t) = u^*(x, t) + v(x, t)$ . Für  $v(x, t)$  muss dann das homogene Problem von oben gelöst werden, wobei (iii) neu  $v(x, 0) = u_0(x) - u^*(x)$  lautet.

## 4.5 Laplace- oder Potentialgleichung

Laplace- oder Potentialgleichung nennt man die PDE

$$\Delta u = 0 \text{ (elliptisch)}$$

### 4.5.1 Harmonische Funktionen

Eine Funktion  $u$  die in einem Gebiet  $G$  die Laplacegleichung erfüllt, heisst harmonisch. Für harmonische Funktionen gilt der "Mittelwertsatz der harmonischen Funktionen", welcher besagt, dass der Funktionswert von  $u$  an einem Punkt  $(x_0, y_0)$  im Zentrum einer Kreisscheibe  $K$  mit Radius  $\rho$  in  $G$  gleich dem Mittelwert von  $u$  auf  $\partial K$  ist:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos t, y_0 + \rho \sin t) dt$$

In drei Dimensionen muss der Vorfaktor auf  $\frac{1}{4\pi R^2}$  geändert werden und die Funktion  $u$  wird über die gesamte Kugeloberfläche integriert.

Daraus folgt, dass sich die Extremalwerte von  $u$  immer auf dem Rand von  $G$  befindet oder falls  $u$  im Innern von  $G$  ein Maximum annimmt, so ist  $u$  eine Konstante (Maximumprinzip).

## 4.6 Poissongleichung

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } G \\ u = g & \text{auf } \partial G \end{cases}$$

### 4.6.1 Lösungsstrategie

1. Finde auf beliebige Weise eine partikuläre Lösung  $u^*$  von  $\Delta u^* = f$  alleine.
2. Setze  $u = u^* + v$ , wobei  $v$  das homogene Dirichlet Problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } G \\ u = g - u^* & \text{auf } \partial G \end{cases}$$

erfüllt, welches mit dem Separationsansatz gelöst werden kann.

### 4.6.2 Greensche Funktion der Poissongleichung

$G_y$  heisst Greensche Funktion (des Laplace-Operators) bezüglich des Gebietes  $B$  falls  $G_y$  für alle  $y \in B$  folgende Bedingungen erfüllt ( $x$  und  $y$  sind im Normalfall Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ ):

$$\lim_{x \rightarrow x_r} G_y(x) = 0 \text{ für alle } x_r \in \partial B$$

$$\Delta G_y(x) = \delta(x - y)$$

Hat man für ein Gebiet  $B$  die Greensche Funktion gefunden, so hat man folgendes Dirichlet-Problem gelöst:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } B \\ u = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$$

Die Lösung lautet  $u(x) = \int_B f(y) G_y(x) dy$

Um die Greensche Funktion zu finden, löst man die PDE

$$\begin{cases} \Delta G_y(x) = \delta(x - y) & \text{in } B \\ G_y(x) = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$$

## 4.7 Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \text{ (hyperbolisch)}$$

### 4.7.1 Methode von d'Alembert

Wenn  $u(x, t)$  das Neumann-Problem

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

erfüllen soll, so gilt gemäss d'Alembert

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy \\ &= \frac{1}{2} [u(x + ct, 0) + u(x - ct, 0)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy \end{aligned}$$

Dies sind zwei Kopien von  $\varphi(x, 0)$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $c$  in beide Richtungen ausbreiten, die Wellenfronten.

### 4.7.2 Helmholtz- oder Schwingungsgleichung

Falls die Wellengleichung mit Randbedingungen gegeben ist, so ist ihre Lösung eine stehende Welle.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u \\ u(0, t) = x_0 \\ u(a, t) = x_a \end{cases}$$

Wenn man das Randwertproblem wie gewohnt durch Variablenseparation in zwei Teilprobleme aufteilt, stösst man für die Ortsabhängigkeit auf die Helmholtz- oder Schwingungsgleichung

$$\Delta X(x) + \lambda X(x) = 0 \text{ mit } \lambda = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Die Lösungen für  $X(x)$  sind ebenfalls periodische Funktionen und es gibt darum Stellen im Raum, wo die Welle sich nicht bewegt (Knoten), an allen übrigen Stellen bewegt sie sich periodisch auf und ab.