

1 Die z-Transformation

Faltung der zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen Signale $f[\cdot]$ und $g[\cdot]$

$$(f * g)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k]g[n - k]$$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Für **graphische Faltung** eines der Signale am Ursprung spiegeln und schrittweise nach rechts verschieben. Bei jedem Schritt die Werte der beiden Signale zu jedem Zeitpunkt multiplizieren und aufsummieren.

z-Transformation eines reellen oder komplexen Signals $f[\cdot]$

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]z^{-k}$$

mit **Definitionsbereich** $ROC(f) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$, wobei r_1 der **Konvergenzradius** der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}$ und r_2 der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f[-k]z^{-k}$ ist.

$F(z)$	$ROC(f)$	$f[\cdot]$
$\frac{z}{z-p}$	$ z > p $	$f[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ p^k, & k \geq 0 \end{cases}$
	$ z < p $	$f[k] = \begin{cases} -p^k, & k < 0 \\ 0, & k \geq 0 \end{cases}$
$\frac{Az}{z-p} + \frac{\bar{A}\bar{z}}{z-\bar{p}}$	$ z > p $	$f[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 2 A p ^k \cos(\Omega k + \varphi), & k \geq 0 \end{cases}$
	$ z < p $	$f[k] = \begin{cases} -2 A p ^k \cos(\Omega k + \varphi), & k < 0 \\ 0, & k \geq 0 \end{cases}$

wobei $A = |A|e^{j\varphi}$ und $p = |p|e^{j\Omega}$.

Stabilität Ein **rechtsseitiges** Signal $f[\cdot]$ ist genau dann stabil (=absolut summierbar), wenn alle Pole von $F(z)$ im Inneren des Einheitskreises liegen. Für ein beliebiges Signal gilt

- $f[\cdot]$ ist stabil \Rightarrow Einheitskreis liegt in $ROC(f)$ o. bildet dessen Rand
- $ROC(f)$ enthält Einheitskreis $\Rightarrow f[\cdot]$ ist stabil
- Falls $F(z)$ rational: $f[\cdot]$ ist stabil $\Leftrightarrow ROC(f)$ enthält Einheitskreis

Anfangs-/Endwertigkeit Wenn $f[\cdot]$ ein **kausales** (z.B. Nennergrad \geq Zählergrad) Signal ist, dann ist

$$f[0] = \lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z)$$

Wenn $f[\cdot]$ ein **rationales, rechtsseitiges** Signal ist, so dass $\lim_{k \rightarrow \infty} f[k]$ existiert, dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

Spektrum Die **zeitdiskrete Fourier-Transformierte** von $f[\cdot]$ ist

$$F(e^{j\Omega}) = F(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k]e^{-j\Omega k}$$

Das Spektrum entspricht der z-Transformierten auf dem Einheitskreis und ist daher periodisch mit **Periode** 2π .

2 Zeitdiskret und zeitkontinuierlich

Laplace-Transformation eines zeitkontinuierlichen Signals $f(\cdot)$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

mit Definitionsbereich $ROC(f) = \{s \in \mathbb{C} : r_1 < \text{Re}(s) < r_2\}$.

Fourier-Transformation eines zeitkontinuierlichen Signals $f(\cdot)$ entspricht der Laplace-Transformation auf der imaginären Achse.

$$F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

mit **Umkehrformel**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Abtastung eines zeitdiskreten Signals $x_s[\cdot]$ aus einem zeitkontinuierlichen Signal $x(t)$

$$x_s[k] = Tx(kT - \tau),$$

wobei T die Abtastperiode ist. Das **Spektrum** des abgetasteten Signals ist dann gleich der Summe aller um ganzzahlige Vielfache von $2\pi/T$ verschobenen Kopien des Spektrums des kontinuierlichen Signals.

D/A-Wandlung des Signals $f[\cdot]$ mit Abtastperiode T_s führt auf

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\delta(t - kT_s)$$

mit dem Spektrum $F(j\omega) = F(e^{j\Omega})$ mit $\Omega = \omega T_s$.

Up-/Downsampling eines Signals $g[\cdot]$ mit Abtastperiode T_s um Faktoren n_{up} und m_{down}

- Upsampling:** Einfüllen von $n_{up} - 1$ Nullen ergibt $G_{up}(e^{j\Omega}) = G(e^{jn_{up}\Omega})$, $\Omega = \omega \frac{T_s}{n_{up}}$, benötigt TP mit $\Omega_c < \frac{\pi}{n_{up}} \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{T_s}$
- Downsampling:** TP mit $\Omega_c = \omega_c \frac{T_s}{m_{down}} < \frac{\pi}{m_{down}} \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{\frac{T_s}{m_{down}}}$

Nyquist-Bedingung Für verlustfreie Rekonstruktion des ursprünglichen Signals muss gelten

$$G(j2\pi f) = 0 \text{ für } |f| \geq f_s/2$$

Butterworth-Filter der **Ordnung** N ist definiert durch

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (1 - s/p_k)} \text{ mit } p_k = \omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)}$$

Die Pole liegen symmetrisch verteilt auf einem Kreis mit Radius ω_c in der negativen Halbebene. Der **Amplitudengang** ist gegeben durch

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

und für sehr grosse Frequenzen vereinfacht durch $|H(j\omega)| = (\omega_c/\omega)^N$.

Bilineare Transformation zur Erzeugung von $G(z)$ aus $H(s)$

$$G(z) = H(s)|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

oder ausgedrückt mit den Spektren der Signale

$$G(e^{j\Omega}) = H(j\omega)|_{\omega=\frac{2}{T} \tan(\Omega/2)}$$

Die bilineare Transformation bildet die ganze imaginäre Achse **umkehrbar** auf den Einheitskreis ab.

3 DFT und FFT

DFT Die **diskrete Fourier-Transformation** bildet aus einem Signalvektor $[f[0], f[1], \dots, f[N-1]]^T$ einen Vektor $[F[0], F[1], \dots, F[N-1]]^T$ definiert durch

$$F[n] = F(\alpha^n) = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]\alpha^{-kn} \text{ mit } \alpha = e^{j2\pi/N}$$

Die DFT berechnet **Abtastwerte** $F[n] = F(e^{j\Omega})|_{\Omega=2\pi n/N}$ des Spektrums von $f[\cdot]$. In **Matrixdarstellung** für $N = 4$

$$\begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \\ \vdots \\ F[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[N-1] \end{bmatrix}$$

Die **inverse DFT** ist bis auf einen Faktor ebenfalls eine DFT und gegeben durch

$$f[n] = F(\alpha^n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f[k]\beta^{-kn} \text{ mit } \beta = \alpha^{-1}$$

Zyklische Faltung zweier Signalvektoren $h = g \otimes f$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]g[(n-k) \bmod N]$$

entspricht der **komponentenweisen Multiplikation** der DFTs der Signale.

4 Wahrscheinlichkeitstheorie

Erwartungswert $m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$

Varianz $\text{Var}(X) = E[(X - m_X)(X - m_X)] = E[|X|^2] - |m_X|^2$

Korrelation/-matrix $\text{Corr}(X, Y) = E[X\bar{Y}] / R_X = E[XX^H]$

Kovarianz/-matrix

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - m_X)(\bar{Y} - \bar{m}_Y)] = E[X\bar{Y}] - m_X \bar{m}_Y$$

$$V_X = E[(X - m_X)(X - m_X)^H] = E[XX^H] - m_X \bar{m}_X^H$$

Autokorrelationsfunktion eines **schwach stationären Prozesses** (sowohl $E[X[k]]$ als auch $E[X[k+n] \cdot \overline{X[k]}]$ unabhängig von k) ist

$$R_X[n] = E[X[k+n] \cdot \overline{X[k]}]$$

und deren z -Transformation ist $S_X(z)$. Die mittlere Leistung des Prozesses ist die Zahl $R_X[0] = E[|X[k]|^2]$.

Kreuzkorrelationsfunktion zweier gemeinsam schwach stationärer Prozesse

$$R_{XY}[n] = E[X[k+n] \cdot \overline{Y[k]}]$$

und deren z -Transformation ist $S_{XY}(z)$.

Lineare Filterung $Y[\cdot] = X[\cdot] * h[\cdot]$ mit $\tilde{H}(z) = H(z^{-1})$ für $h[\cdot] \in \mathbb{R}$

$$m_Y = m_X H(1)$$

$$S_{YY}(z) = S_X(z) H(z)$$

$$S_{XY}(z) = S_X(z) \tilde{H}(z)$$

$$S_Y(z) = S_X(z) H(z) \tilde{H}(z)$$

Weisses Rauschen Ein Prozess $W[\cdot]$ wird weisses Rauschen mit **Leistung** σ^2 genannt, falls $W[\cdot]$ schwach stationär ist mit $m_W = 0$ und

$$R_W[\cdot] = \sigma^2 \delta[\cdot]$$

(die z -Transformierte lautet $S_W(z) = \sigma^2$).

5 Entscheidungs- und Schätztheorie

Bayes'sche Schätzung minimiert für jede **Beobachtung** $Y = y$ den Erwartungswert einer **Kostenfunktion** $\kappa(\hat{x}, X)$ gemäss

$$\hat{x} = \underset{\hat{x}}{\operatorname{argmin}} E[\kappa(\hat{x}, X) | Y = y]$$

Eine beliebige Kostenfunktion ist $\kappa(\hat{x}, X) = |\hat{x} - X|^2$, welche auf die Schätzung

$$\hat{x} = E[X | Y = y]$$

führt und den **mittleren Schätzfehler** $E[|\hat{x} - X|^2 | Y = y] = E[|X - m_X(y)|^2 | Y = y] = \operatorname{Var}(X | Y = y)$ besitzt.

Maximum-Likelihood-Schätzung ist dasjenige x , welches die Wahrscheinlichkeit der Beobachtung y maximiert

$$\hat{x} = \underset{x: f_X(x) > 0}{\operatorname{argmax}} f_{Y|X}(y|x)$$

MAP-Entscheidungsregel Falls X eine **diskrete Zufallsgrösse** ist, welche Werte aus einer endlichen Menge annimmt, wird das **Schätzproblem** zum **Entscheidungsproblem**. Die Bayes'sche Entscheidungsregel, welche durch die Kostenfunktion

$$\kappa(\hat{x}, X) = \begin{cases} 1, & \hat{x} = x \\ 0, & \hat{x} \neq x \end{cases}$$

direkt die Fehlerwahrscheinlichkeit minimiert, ist die **maximum a posteriori** (MAP) Entscheidungsregel.

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \underset{x}{\operatorname{argmin}} P(X \neq x | Y = y) \\ &= \underset{x}{\operatorname{argmax}} P(X = x | Y = y) \\ &= \underset{x}{\operatorname{argmax}} P(X = x) f_{Y|X}(y|x) \end{aligned}$$

LMMSE-Schätzung Aus den Beobachtungen Y_1, Y_2, \dots, Y_n soll X durch eine **lineare Funktion** geschätzt werden, wobei $E[|\hat{x} - X|^2]$ minimiert werden soll, genannt **linear minimum mean squared error** (LMMSE) Schätzung.

$$\hat{x} = h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \sum_{k=1}^n h_k Y_k$$

wobei die Koeffizienten h_k auf Grund des **Orthogonalitätsprinzips** durch die n Gleichungen

$$\sum_{j=1}^n h_j E[Y_j \overline{Y_k}] = E[X \overline{Y_k}]$$

mit $k = 1, 2, \dots, n$ bestimmt werden können. Falls das System mehrere Lösungen ist eine LMMSE-Schätzung und führt auf den gleichen **mittleren quadratischen Fehler** $E[|\hat{x} - X|^2]$.

Wiener-Filter **Zeitinvariantes Filter** mit Stossantwort $h[\cdot]$, so dass die Schätzung $\hat{X}[\cdot] = h[\cdot] * Y[\cdot]$ möglichst kleinen mittleren quadratischen Fehler ergibt. Ausserdem sei $h[n] = 0$ für $n < -L$ und $n > M$ (=Ordnung des Filters) und $N = L + M$. Die Stossantwort dieses Filters kann für $L < \infty$ und $M < \infty$ bestimmt werden durch

$$\begin{bmatrix} R_Y[0] & \overline{R_Y[1]} & \dots & \overline{R_Y[N]} \\ R_Y[1] & R_Y[0] & \dots & \overline{R_Y[N-1]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_Y[N] & R_Y[N-1] & \dots & R_Y[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0-L] \\ h[1-L] \\ \vdots \\ h[N-L] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XY}[0-L] \\ R_{XY}[1-L] \\ \vdots \\ R_{XY}[N-L] \end{bmatrix}$$

Für $L = M = \infty$ kann die z -Transformation zur Bestimmung von $H(z)$ herangezogen werden

$$H(z) = \frac{S_{XY}(z)}{S_Y(z)}$$

LMS-Algorithmus Statt eines explizit berechneten Wiener-Filters wird in der Praxis oft ein adaptives Filter verwendet, welches zur Wiener-Filterfunktion konvergieren soll. Das Adaptionsverfahren ist der **least mean square (error)** (LMS) Algorithmus. Die Beobachtung $Y[k]$ wird dazu mit einem zeitvarianten FIR-Filter gefiltert und liefert den Schätzwert

$$\hat{X}[k] = \sum_{n=0}^N h_k[n] Y[k-n],$$

wobei die Filterkoeffizienten $h_k[n]$ im **adaptierenden Betriebszustand** nach dem **stochastischen Gradientenverfahren**

$$h_{k+1}[n] = h_k[n] + \beta \left(X[k] - \hat{X}[k] \right) Y[k-n]$$

aufdatiert werden. Nach einer Lernphase wird das Signal X entfernt und das Filter läuft im **eingefrorenen Betriebszustand** ohne weitere Adaption.

6 Trellis Algorithmen

Min-Summe-Version d. Viterbi-Algorithmus

- Pfadmetrik = **Summe** der Zweigmetriken
- Initialisierung $\mu(s) = 0$ für alle Anfangszustände s
- Berechnung der Zustandsmetriken

$$\mu(s) = \min_{b: \operatorname{rst}(b)=s} \mu(\operatorname{lst}(b)) + \mu(b)$$

- Haupteigenschaft: $\mu(s)$ = **minimale** Pfadmetrik von einem Anfangszustand zum Zustand s

Max-Produkt-Version d. Viterbi-Algorithmus

- Pfadmetrik = **Produkt** der Zweigmetriken
- Initialisierung $\mu(s) = 1$ für alle Anfangszustände s
- Berechnung der Zustandsmetriken

$$\mu(s) = \min_{b: \operatorname{rst}(b)=s} \mu(\operatorname{lst}(b)) \cdot \mu(b)$$

- Haupteigenschaft: $\mu(s)$ = **maximale** Pfadmetrik von einem Anfangszustand zum Zustand s

Pfadschätzung mittels Viterbi-Algorithmus

- **ML-Entscheidung** für einen Pfad: Zu bestimmen ist

$$\begin{aligned} \hat{w}_{ML} &= \underset{w}{\operatorname{argmax}} f_{Y|W}(y|w) \\ &= \underset{w}{\operatorname{argmax}} \prod_{k=1}^n f_{Y_k|W_k}(y_k|w_k) \end{aligned}$$

Max-Produkte-Version: $\mu(w_k) = f_{Y_k|W_k}(y_k|w_k)$
Min-Summe-Version: $\mu(w_k) = -\log(f_{Y_k|W_k}(y_k|w_k))$

- **MAP-Entscheidung** für einen Pfad: Zu bestimmen ist

$$\begin{aligned} \hat{w}_{MAP} &= \underset{w}{\operatorname{argmax}} P(W = w | Y = y) \\ &= \underset{w}{\operatorname{argmax}} P(W = w) f_{Y_k|W_k}(y_k|w_k) \end{aligned}$$

Max-Produkte-Version: $\mu(w_k) = p(w_k | \operatorname{lst}(w_k)) f_{Y_k|W_k}(y_k|w_k)$
Min-Summe-Version: mit negativem Logarithmus, wie oben.