BASEMENT

Einführung in die numerische Modellierung

… von Strömung und Sedimenttransport

… in offenen Gerinnen

… in einem Gebirgsland

… von Naturge..
… mit BASEM…

Ziel: **Begriffe einführen**

Gleichungen und numerische Probleme erläutern

Schwierigkeiten aus Sicht des Anwenders

Fokus: Sedimenttransport

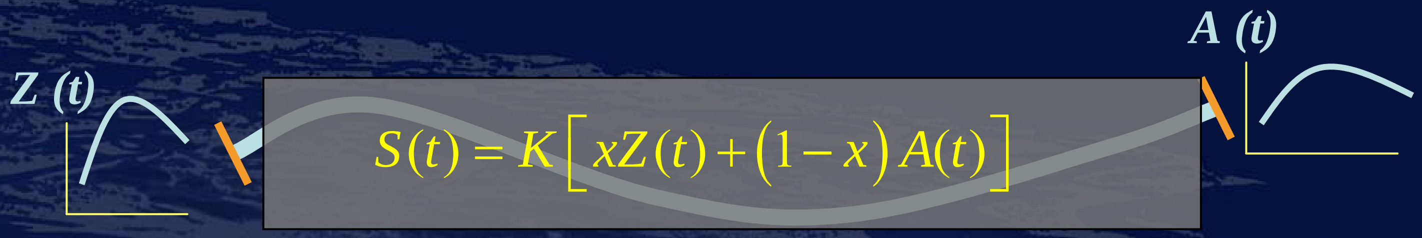
Roland Fäh

Versuchsanstalt für Wasserbau Hydrologie und Glaziologie

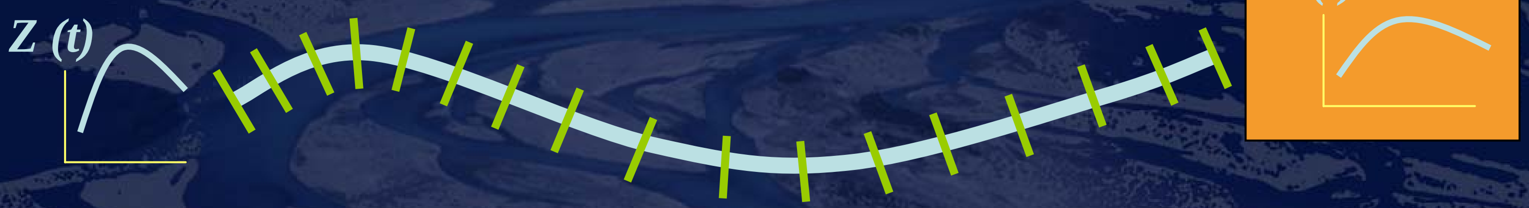
ETH Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Flood-Routing-Verfahren

Hydrologische Verfahren

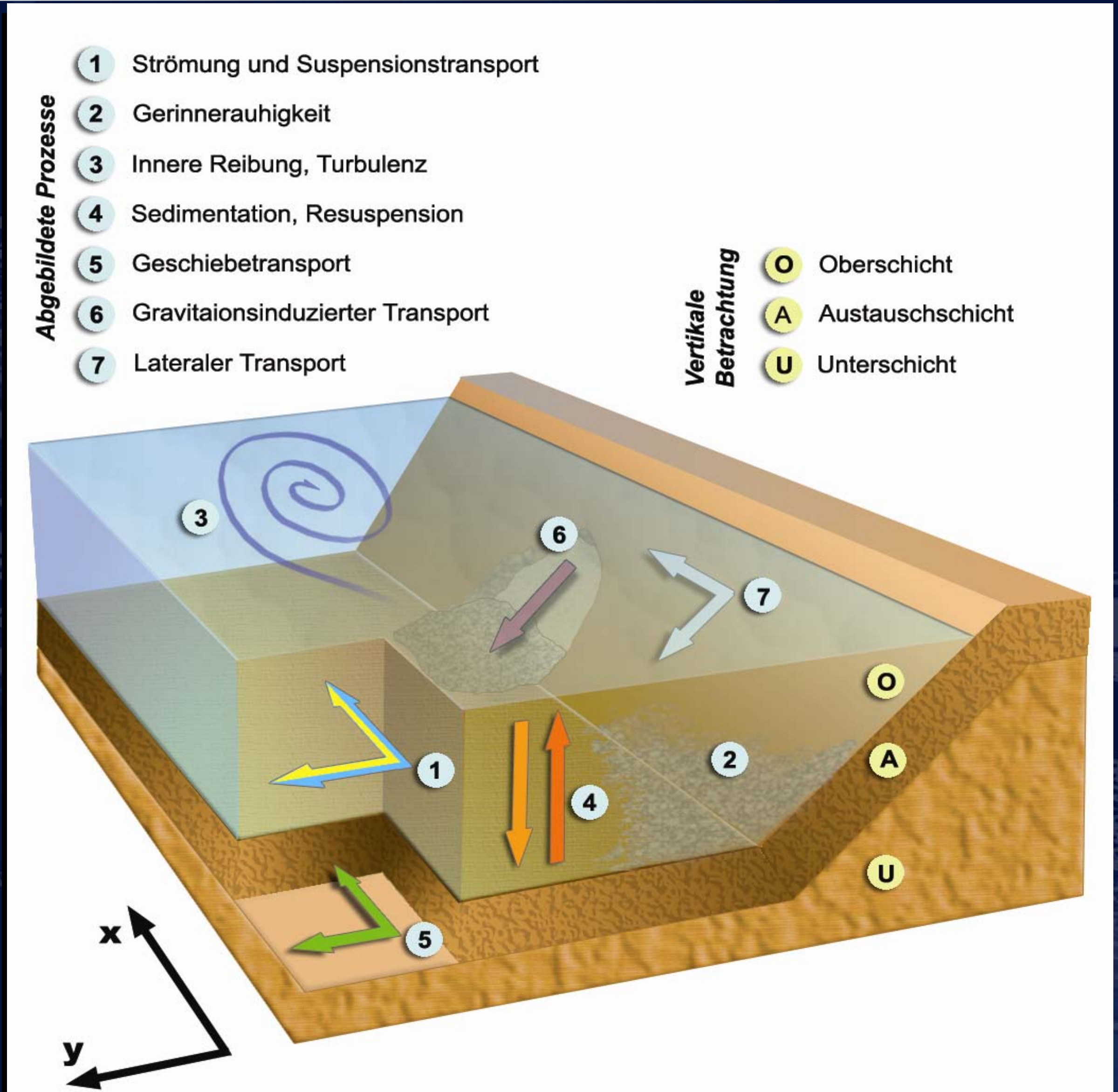


$$S(t) = K\left[xZ(t) + \left(1-x\right)A(t)\right]$$



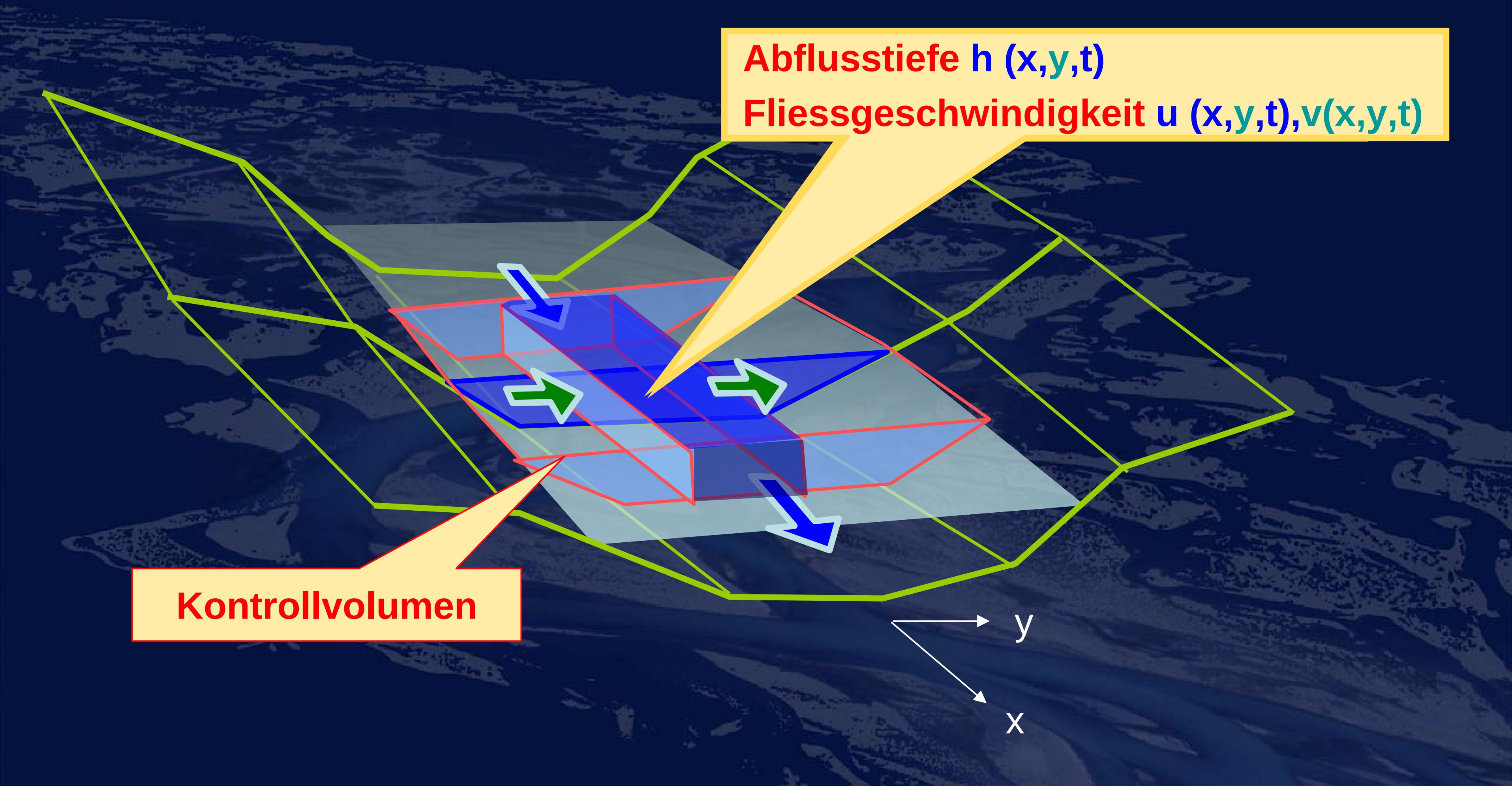
Hydrodynamische Verfahren

Prozesse

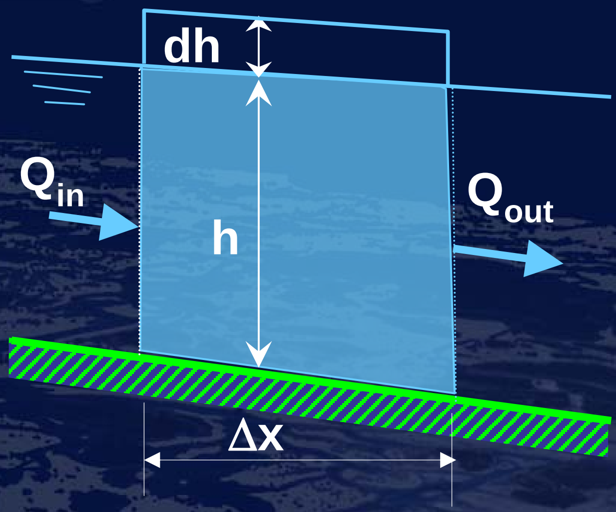


Abgebildete Prozesse
1 Strömung und Suspensionstransport
2 Gerinnerauhigkeit
3 Innere Reibung, Turbulenz
4 Sedimentation, Resuspension
5 Geschiebetransport
6 Gravitaionsinduzierter Transport
7 Lateraler Transport
Vertikale Betrachtung
O Oberschicht
A Austauschschicht
U Unterschicht
x
y

1d resp. 2d


Abflusstiefe h (x,y,t)
Fliessgeschwindigkeit u (x,y,t),v(x,y,t)
Kontrollvolumen
y
x

Massenerhaltung



h: Abflusstiefe [m]
Q: Volumenfluss [m^3/s]

$$dh \cdot B \cdot \Delta x = \left(Q_{in} - Q_{out}\right) \cdot \Delta t$$

Volumenänderung in der Zeit Δt

B: Breite [m]
A: Durchströmte Fläche [m^2/s]

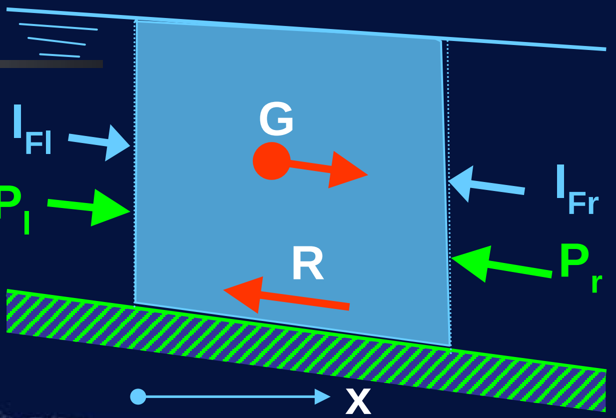
$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_{lat}$$

➔ Bietet kaum Probleme

➔ Lässt sich leicht überprüfen

Impulserhaltung

$$m * b = \frac{d(mv)}{dt} = \sum Kräfte$$



$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \Delta I_f \quad + \Delta P \quad + G - R$$

Zeitliche Änderung des Impulses

Konvektive Beschleunig.

Druck

Gewicht

Reibung

$$-S_b + S_f = 0$$

Normalabfluss (Strickler)

$$v = k_{st} h^{2/3} \sqrt{S_f}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA\left(\frac{\partial h}{\partial x} - S_b + S_f\right) = 0$$

Staukurve: Q(t)=const.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA\left(\frac{\partial h}{\partial x} - S_b + S_f\right) = 0$$

De Sain-Venant Gleichung

Problem: Nichtlinearität

Schliessbedingung

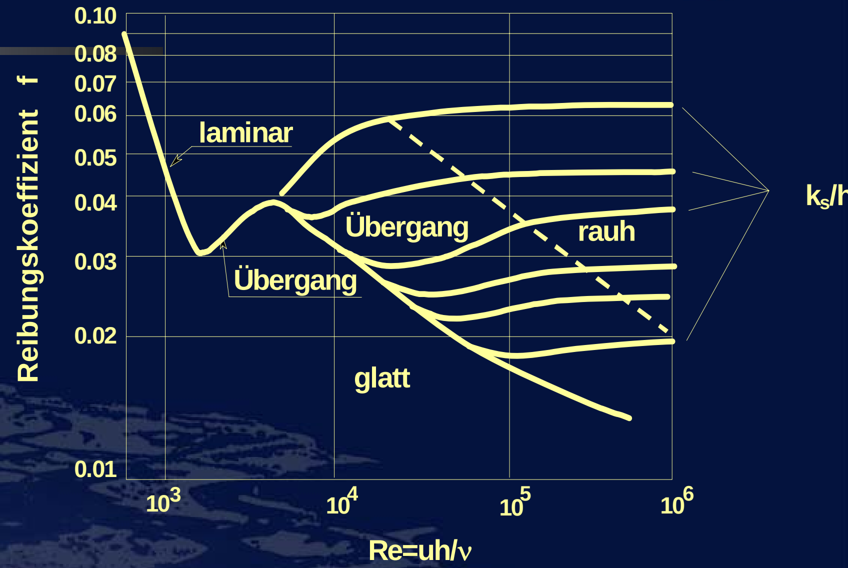
BASEMENT

Reibung

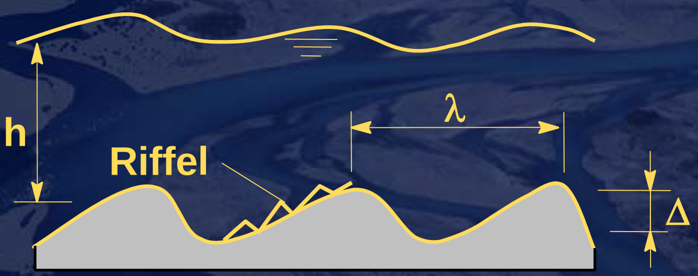
Kornreibung:

$$c_f = 5.75 \log\left(\frac{12h}{k_s}\right)$$

$$k_s = (1.5 - 4.)d_{90}$$



Formreibung:



λ: **Wellenlänge der Düne**

Δ: **Wellenhöhe**

Δ/λ: **Steilheit**

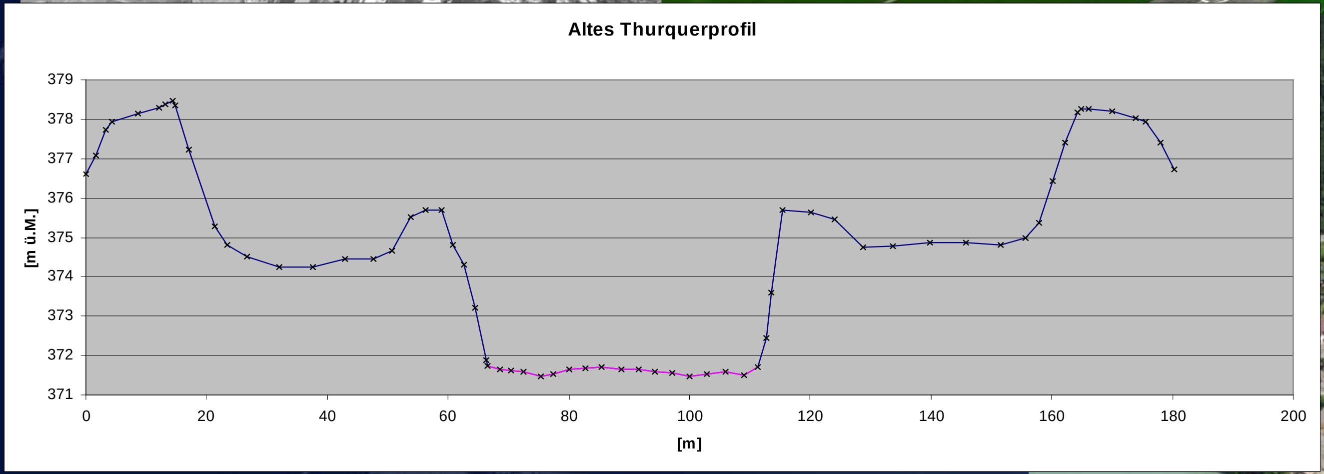
Feststofftransport

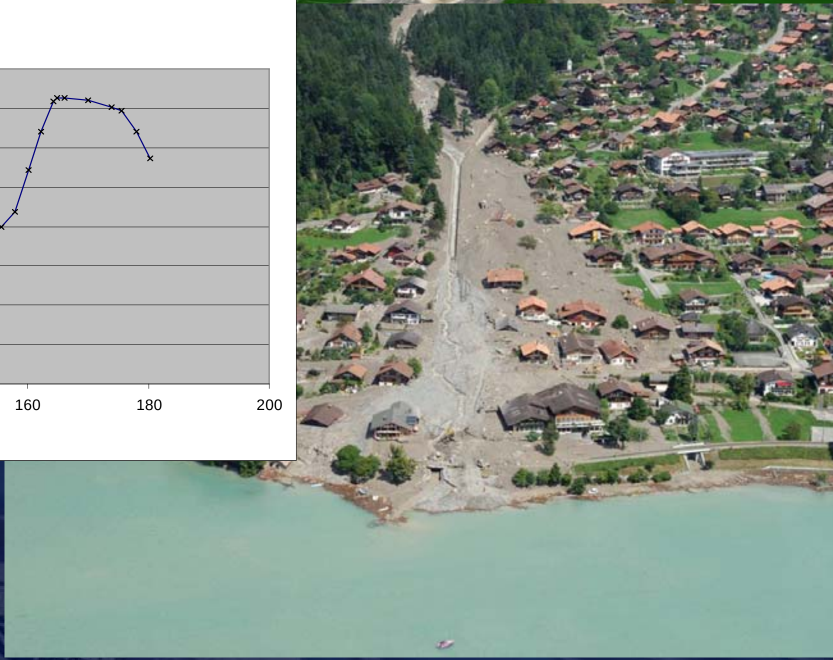
Gliederung nach Transportmechanismen

Gesamttransport

- **Strömungsinduziert**
  - Schwebstofftransport
  - Geschiebetransport
- **Strömungs- und Gravitationsinduziert**
  - Seitlicher Transport
  - Murgang
- **Gravitationsinduziert**
  - Böschungskollaps
  - Hangstabilität/Bergsturz

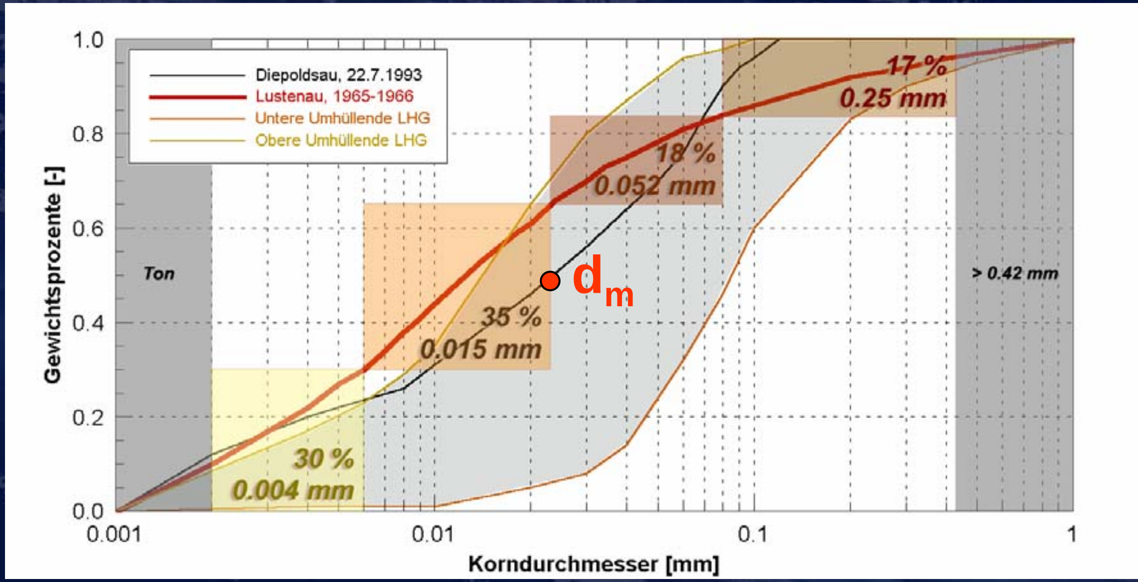
Geschiebe- vs. Schwebstofftransport





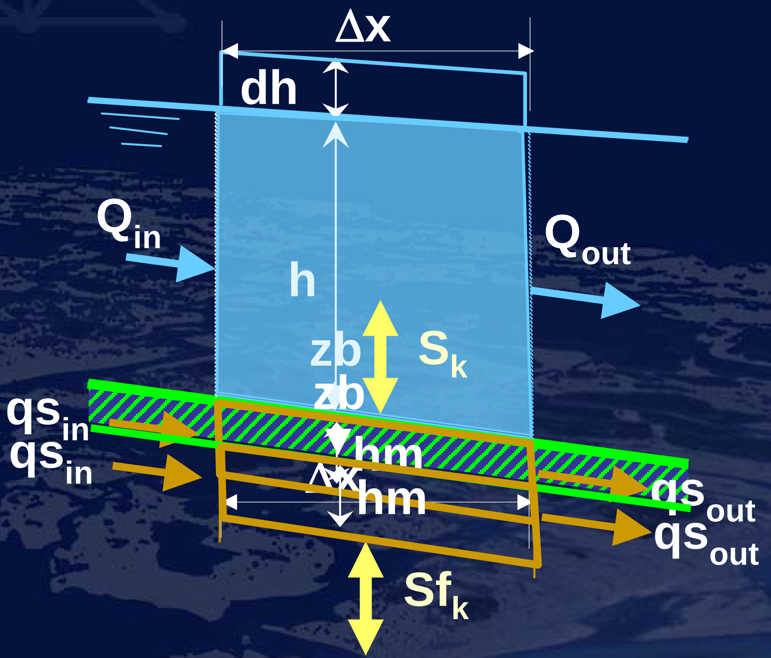
Übergang fliessend > Murgang

Mehrkornmodell



Massenerhaltung im Activelayer

BASEMENT



β_k %-Volumen der Fraktion k am Gesamtvolumen [-]

p Porosität [-]

S_k Austausch Suspension [ms^{-1}]

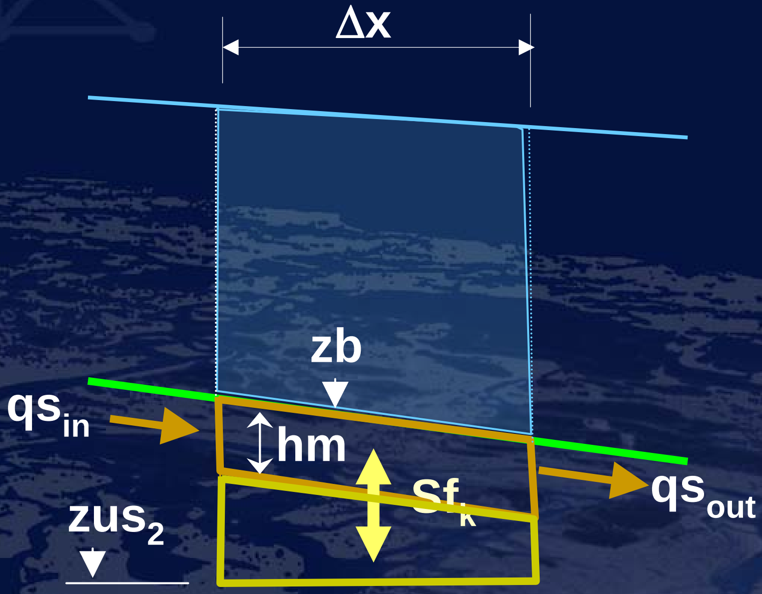
Sf_k Austausch Boden [ms^{-1}]

Sl_k lokaler Zu- oder Wegfluss [ms^{-1}]

$$(1-p)\frac{\partial(\beta_k hm)}{\partial t}+\frac{\partial qs_k}{\partial x}+S_k-Sf_k-Sl_k=0$$

k Sortiergleichungen: Bestimmungsgleichung für β_k

Bestimmungsgleichung für zb



zb:	Sohlenkote [m]
qs:	Geschiebefluss [m^3/ms]
hm:	Dicke des Activelayers [m]

S_k:	Austausch Suspension [ms^{-1}]
Sf_k:	Austausch Boden [ms^{-1}]
Sl_k:	lokaler Zu- oder Wegfluss [ms^{-1}]

$$(1-p)\frac{\partial\left(zb-hm-zus_2\right)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{nk} Sf_k = 0$$

$$(1-p)\frac{\partial zb}{\partial t}+\sum_{k=1}^{nk}\left(\frac{\partial qs_k}{\partial x}+S_k+Sl_k\right)=0$$

Bodenevolutionsgleichung

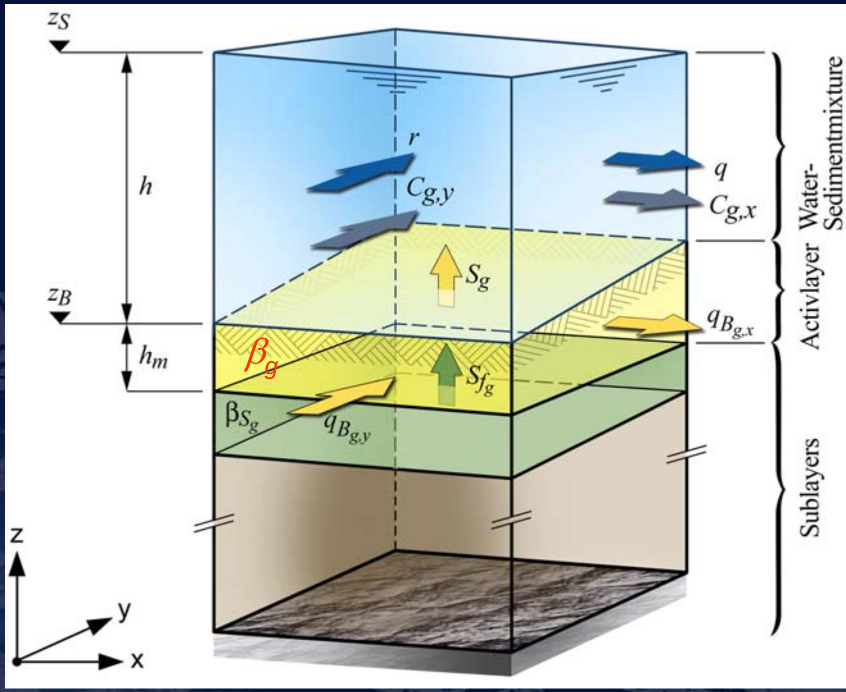
Exnergleichung

BASEMENT

Gesuchte Grössen

Primäre Unbekannte

- *Wasser* h q r
- *Sediment* C_g zb β_g



Sekundäre Unbekannte

- *Geschiebetrieb* *qbx* *qby*
- *Austauschschicht* *hm*
- *Quellterme* S_g Sf_g

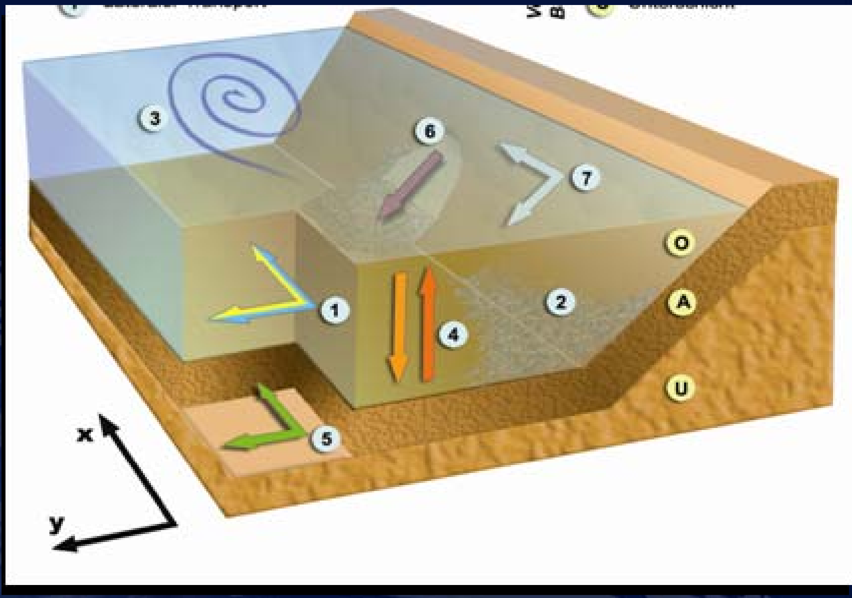
Sekundäre Unbekannte sind Funktionen der primären Variabeln

$F(h, q, r, zb, \beta_g, C_g)$

Empirische Schliessbedingungen

Geschiebetrieb

$$qsx_k = qsx_{xk} + qsx_{yk} + qsx_{gk}$$



qsx_{xk}: Geschiebetrieb aufgrund der Strömung in x-Richtung

qsx_{yk}: lateraler Geschiebetrieb aufgrund Strömung in y-Richtung

qsx_{gk}: Rein gravitationsinduzierter Feststofftransport

Schliessbedingungen: Geschiebetransport

Geschiebetransport aufgrund Strömung in x-Richtung

$$qsx_{xk} = \beta_k (1 - \varphi_k)\, \xi_k\, qb_k$$

$$qb_k \sim \left(\tau - \tau_{cr}\right)^{3/2}$$

$$\tau_{cr} = \theta_{cr} \left(\rho_s - \rho_w\right) g d_m$$

$$\tau_{cr} = \xi_k k_\beta k_\gamma \tau_{cr,h}$$

$$\xi_k = 0.85 \frac{d_m}{d_k}$$

$$\varphi_k = 0.25 + 0.325 \ln\left(\frac{u_*}{w_k}\right)$$

$$w_k = F(d_k, \nu, \rho, C)$$

qb_k: Transportkapazität (z.B. Meyer-Peter)

β_k : Anteil der Kornklasse *k*

φ_k: Faktor für Zuweisung zur Transportart (Geschiebe/Suspension)

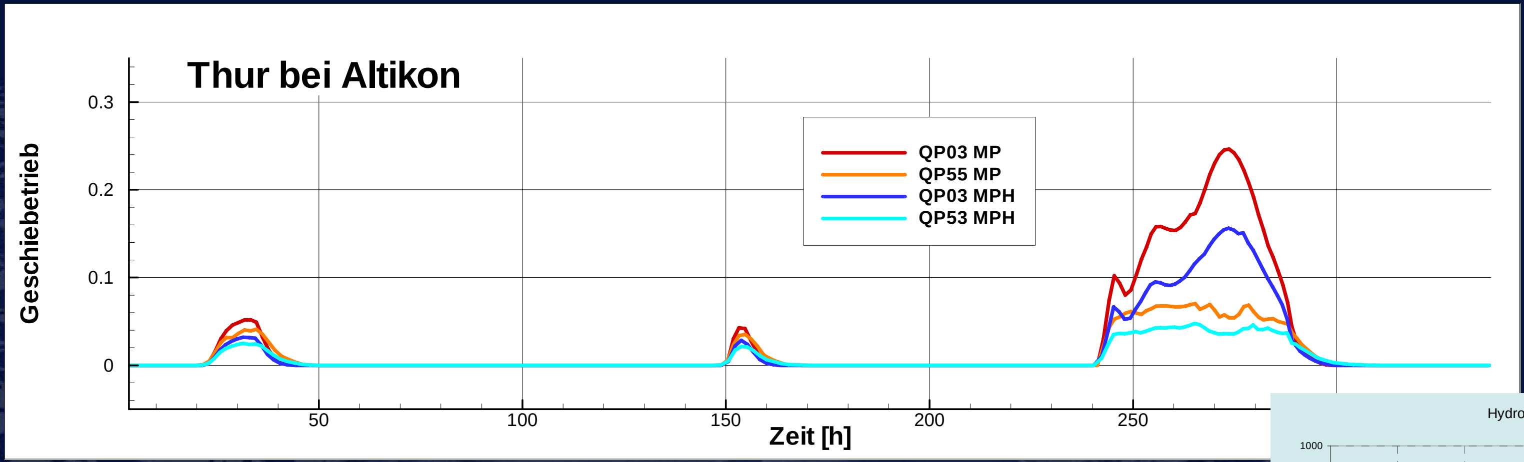
ξ_k : Hiding Function

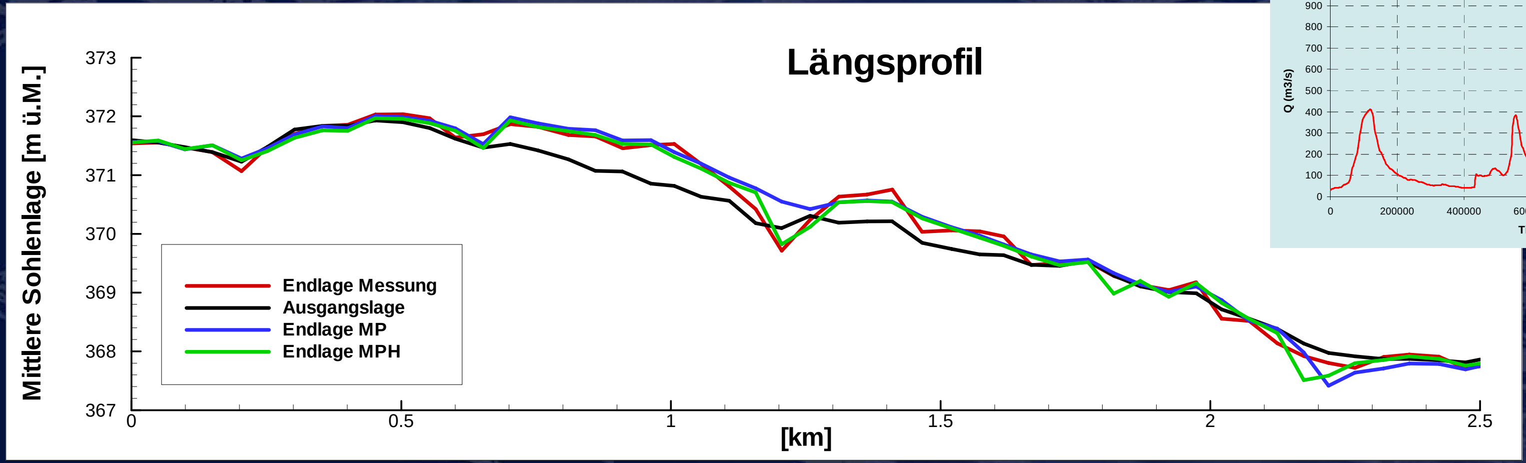
w_k : Sinkgeschwindigkeit

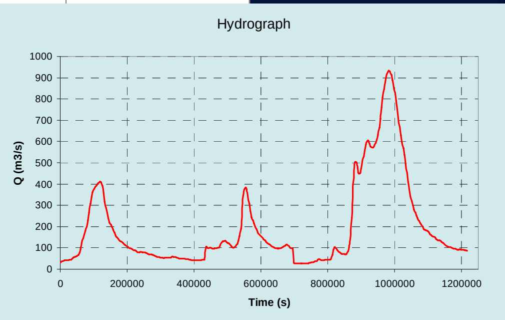
→Kalibrierung ?

Beispiel zum Thema Geschiebetriebformel

Meyer-Peter vs. Meyer-Peter-Hunziker







➔ Was ist richtig ?

Gleichungen ➔ Lösung

Modell ⇒ Ausschnitt der Wirklichkeit

- Zeitlich

  Anfangsbedingungen: $h(t_0, x, y)$, $q(t_0, x, y)$……

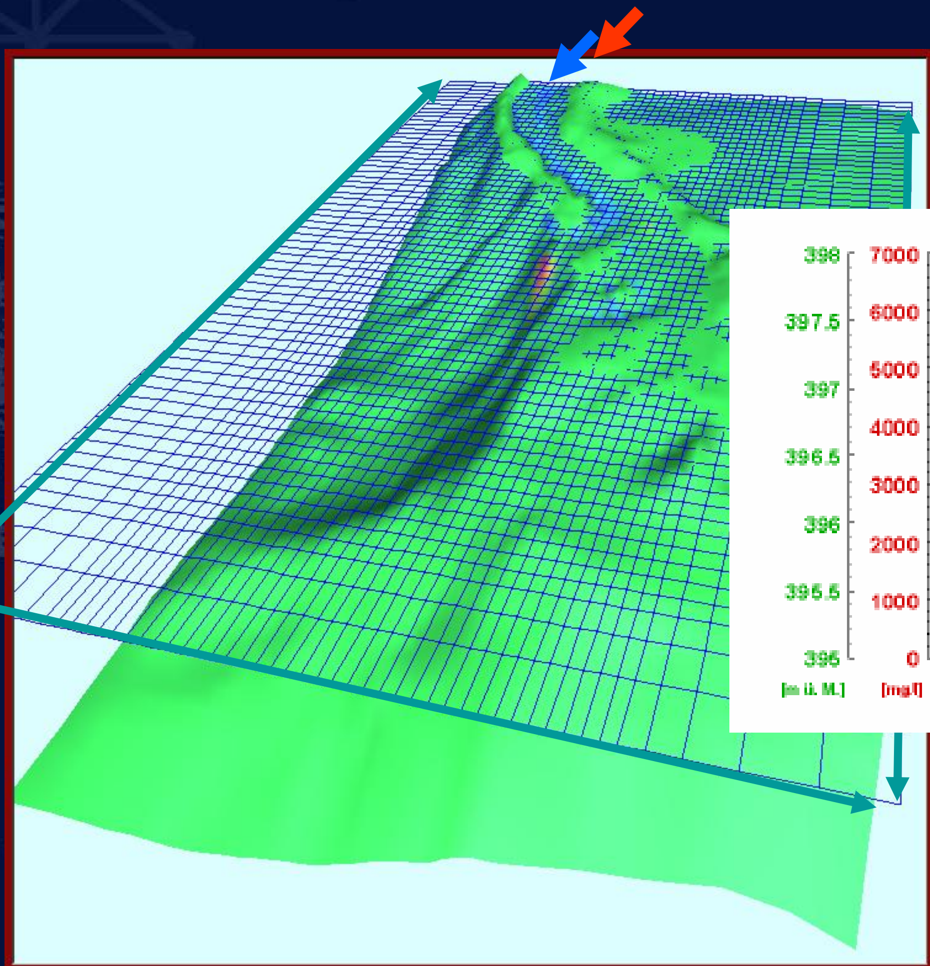
- Räumlich

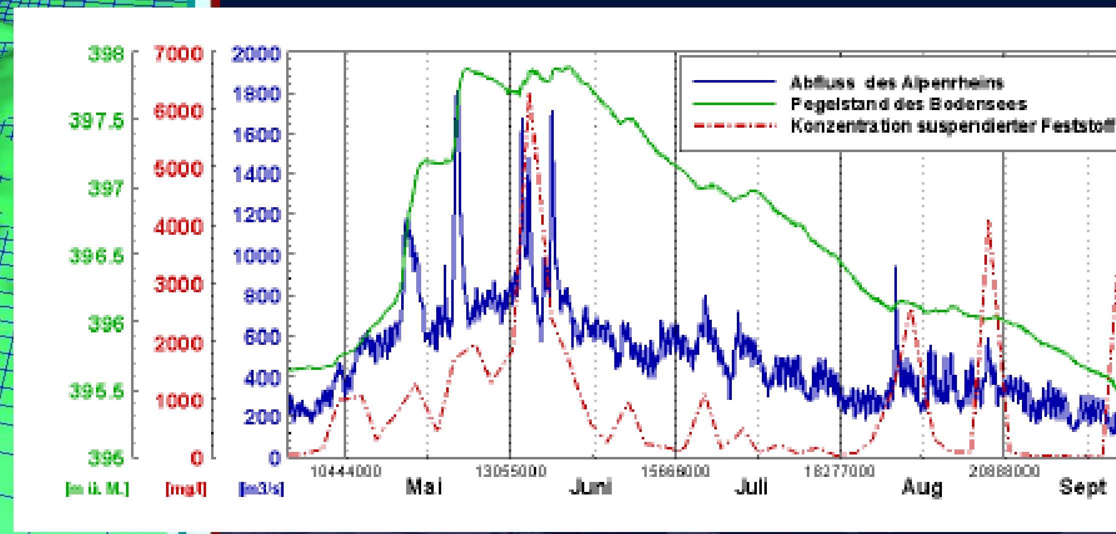
  Randbedingungen: $Q(t)$, $Qs(t)$
  - Hydrologie
  - Sedimentzufluss ?

➔ RB beinhalten grösste Unsicherheit

BASEMENT

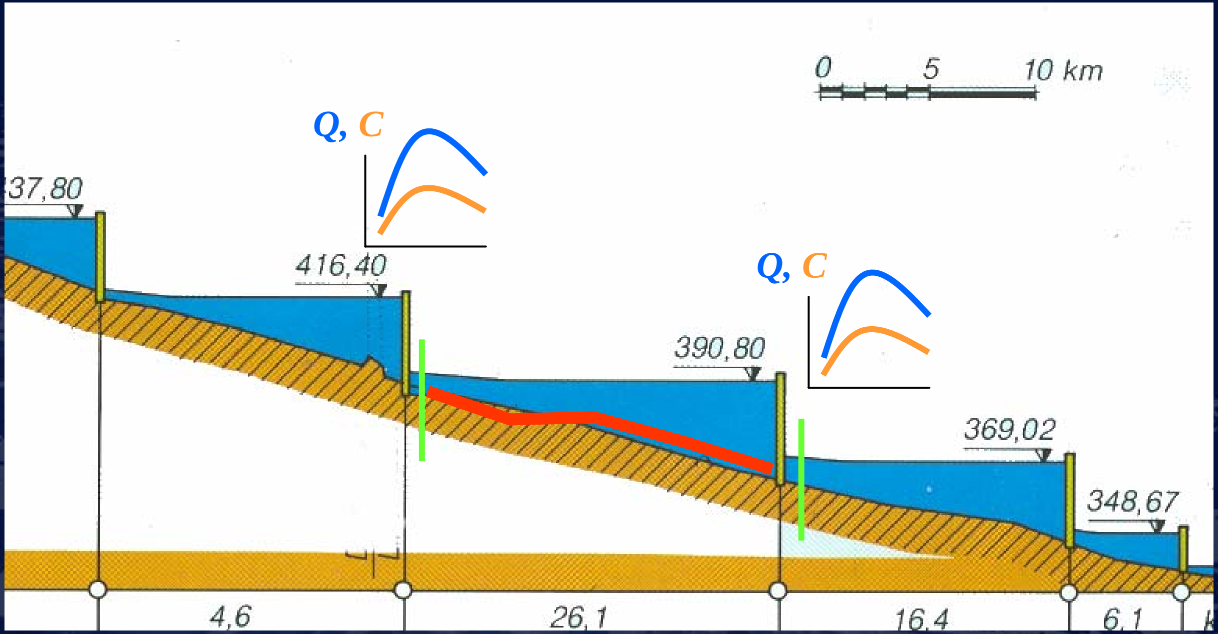
Randbedingungen





Typ der RB: Charakteristiken > schiessen/strömen

Probleme bei Messung der Feststoffe



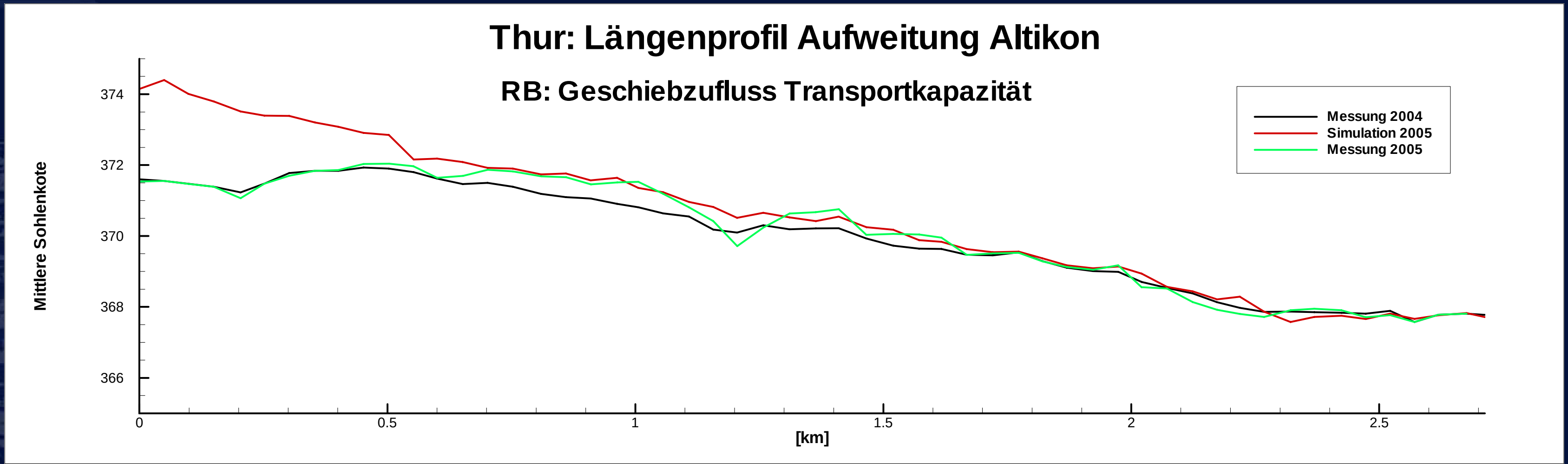
➔ Grosse Abweichungen in der Bilanz !

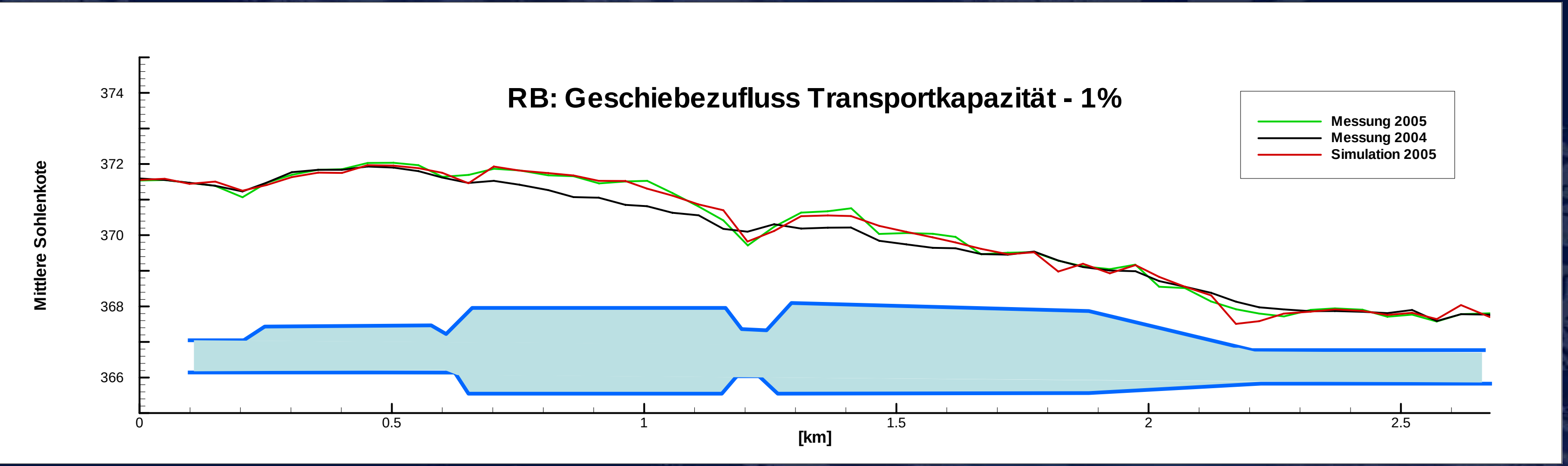
Schwebstoffbeziehung

$$C = a\,Q^{b}$$

Konzentration [g/m3]	Abfluss [m3/s]	Datum
8091	453	1.09.92
6794	704	1.10.91
5938	521	14.09.93
5342	848	25.08.87
5109	545	2.09.88
4599	799	15.10.93
3682	1352	16.06.87

Randbedingung Geschiebe





➔ RB Feststofftransport > sensitiv

Mathematik ➔ Numerik

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$$

explizit

implizit

Finite Differenzen

Finite Volumen

Finite Elemente

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\Delta F(u)}{\Delta x} = 0$$

➔ **Welches ist das beste Verfahren ?**

BASEMENT

Lösungsstrategie

Flachwassergleichungen lösen

$\Rightarrow$ Abflusstiefe **h**

$\Rightarrow$ Fliessgeschwindigkeit ***u,v***

Transportgleichung für Suspension

$\Rightarrow$ Konzentration C_k

Massenbilanz in Austauschschicht

$\Rightarrow$ Kornverteilung β_k

Globale Massenbilanz

$\Rightarrow$ Sohlenkote ***zb***

Reibungsbeiwert

Iteration

Loop über Zeitschritte

➔ **Entkoppelt vs. Simultan**

Grundsätzliches zu numerischen Methoden

Zeitintegration

Räumliche Diskretisierung

Genauigkeit

Stabilität

Konvergenz

Modellgleichungen

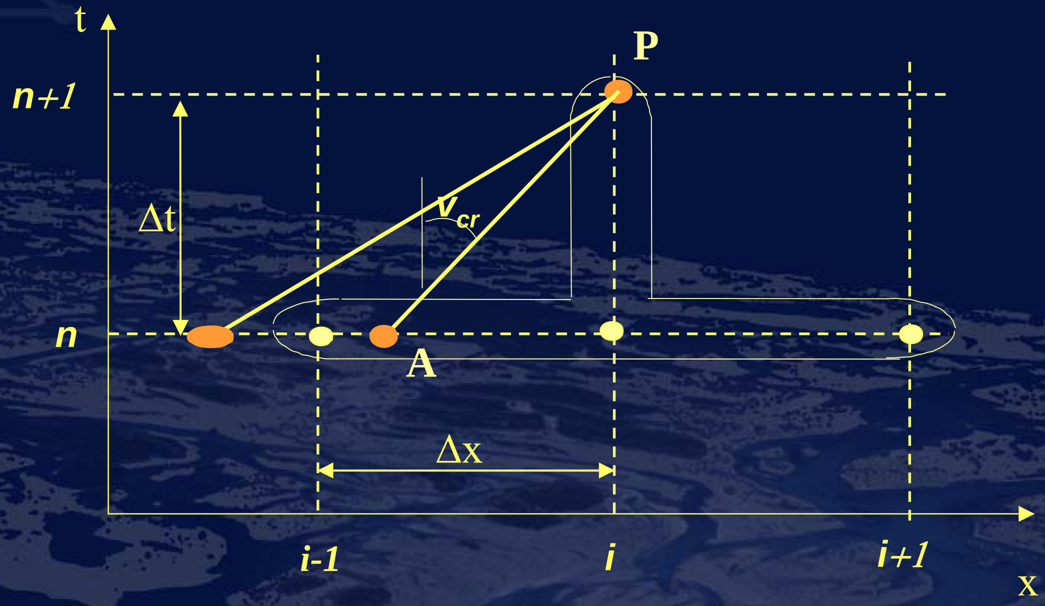
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Lineare Wellengleichung

BASEMENT

Zeitdiskretisierung



$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_{Ch}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - v_{Ch}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n\right)$$

Explizit: $U_i^{n+1} = f\left(U_i^n, U_{i+1}^n, U_{i-1}^n\right)$ $v_{Ch}\Delta t \leq \Delta x$ $\frac{v_{Ch}\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

Kein Gleichungssystem

Courant-Friedrich-Levy Zahl (CFL)

Implizit: $U_i^{n+1} = f\left(...U_i^n, U_{i+1}^n, U_{i-1}^n, ...U_i^{n+1}, U_{i+1}^{n+1}, U_{i-1}^{n+1}....\right)$

Gleichungssystem: falls nichtlinear > Iteration

Berechnungszeit

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{Ch}}$$

Strömungsfeld $v_{Ch} = v \pm \sqrt{gh} \rightarrow 7\ \text{m/s}$

Suspension $v_{Ch} = v \rightarrow 1\ \text{m/s}$

Exnergl. $v_{Ch} = \dfrac{u \dfrac{df(u)}{du}}{h\left(1\text{-}Fr^2\right)} \rightarrow 1\ \text{km/year}$

1d: Δx = 50-200 m $\Rightarrow$ Δt = 10 s

2d: Δx = 5 - 30 m $\Rightarrow$ Δt = 1 s

Geschiebehaushaltstudie ? ⇒ Parallelisieren

Mathematik → Numerik

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$$

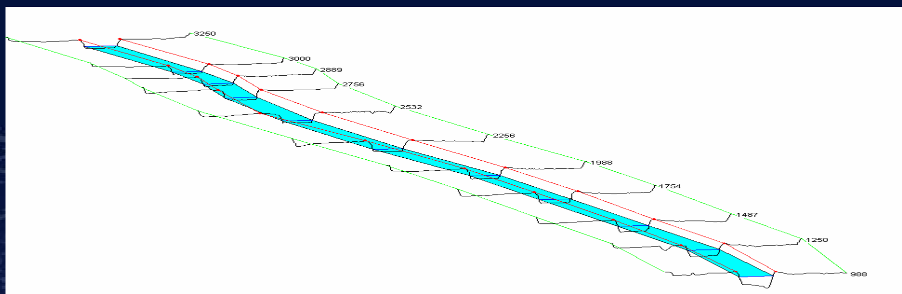
explizit

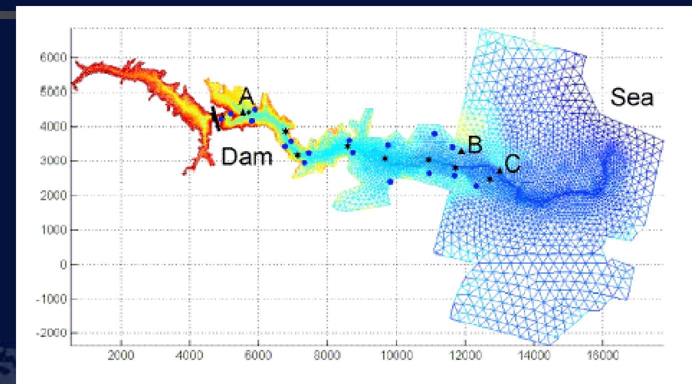
implizit

Finite Volumen

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\Delta F(u)}{\Delta x} = 0$$

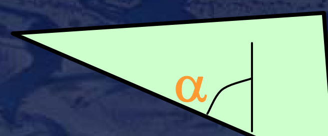
Rechengitter





Gitterqualität: **Genauigkeit und Konvergenz hängen ab von**

- ***Orthogonalität***

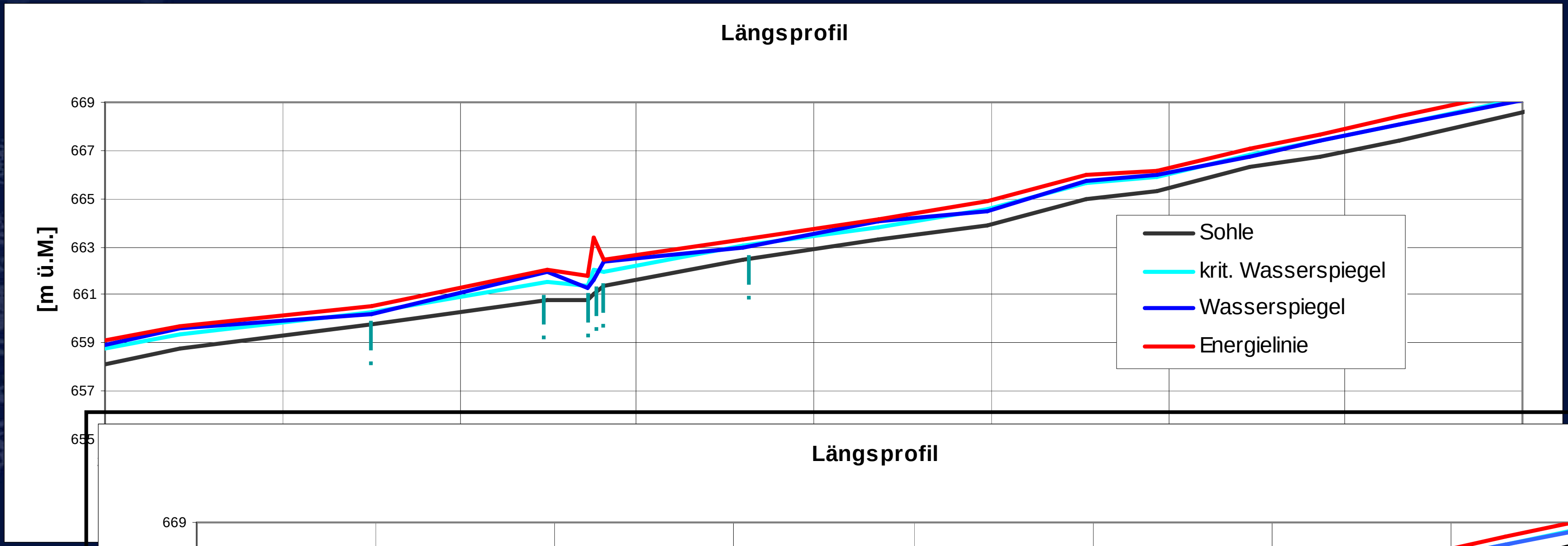


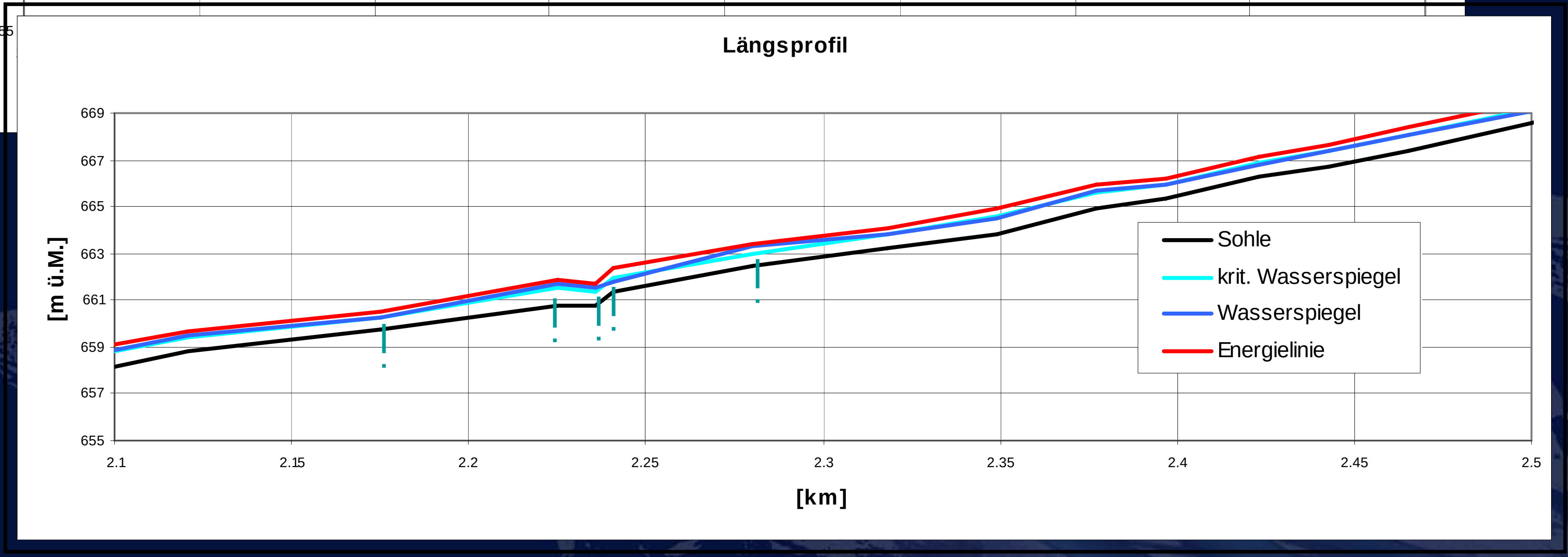
45º < α <135º

- ***aspect ratio:*** **$dx_b/dy_b<2$**

- ***expansion ratio:*** **$dx_b/dx_a < 1.2$**

Beispiel zum Thema Gitterqualität



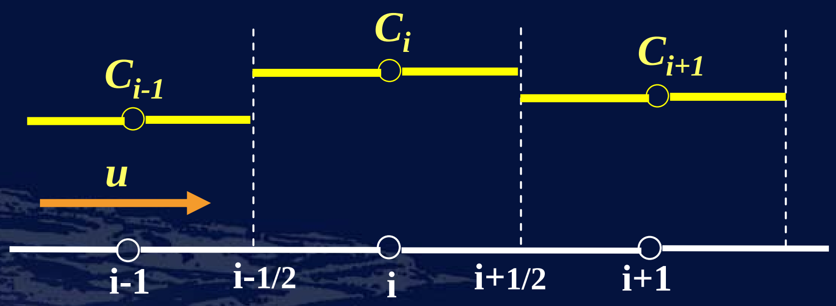


Räumliche Diskretisierung

$$C_i^{n+1} = C_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i-1/2}^n - F_{i+1/2}^n\right)$$

Fluss über Zellseite

$$F_{i+1/2}^n = f\left(C_{i-1}^n, C_i^n, C_{i+1}^n\right)$$



Upwind scheme (1. Ord.)

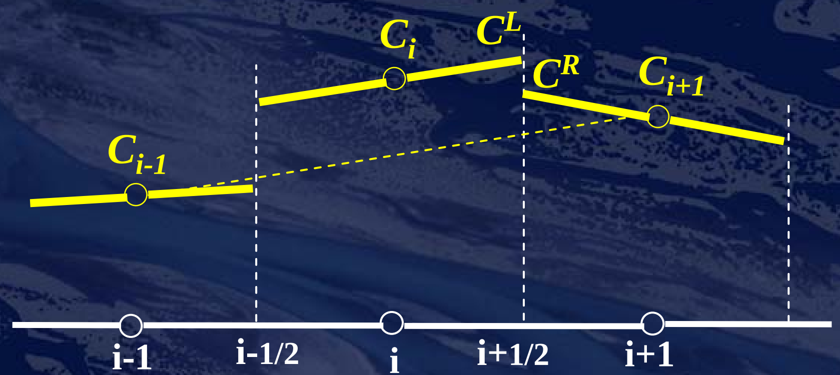
$$F_{i+1/2}^n = f\left(C_i^n\right) \qquad \text{if } u>0$$

$$F_{i+1/2}^n = f\left(C_{i+1}^n\right) \qquad \text{if } u<0$$

Central scheme

$$F_{i+1/2}^n = 0.5\left[f\left(C_i^n\right) + f\left(C_{i+1}^n\right)\right]$$

Higher order Upwind scheme



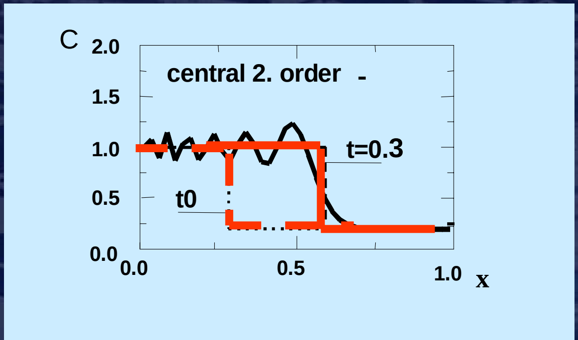
Einfluss verschiedener Rechenschemen

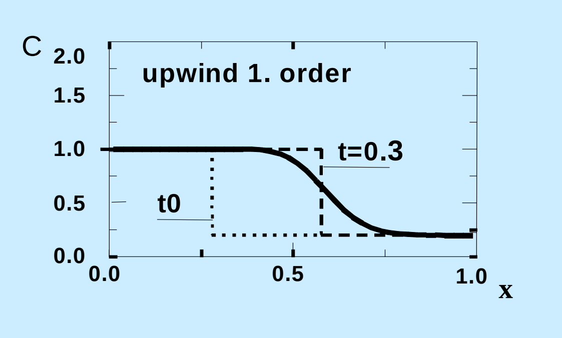
$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

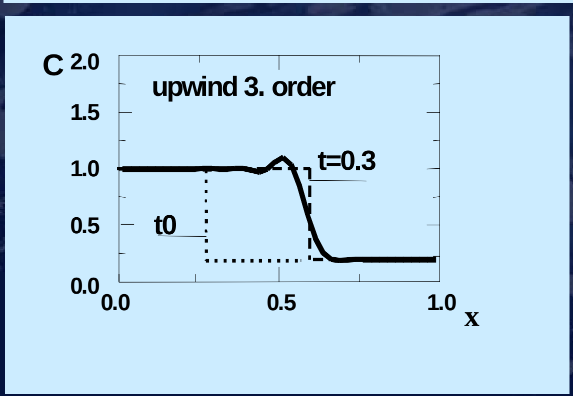
mit Anfangsbedingung: $C(x,0) = 1$ für $0 \le x \le 0.3$

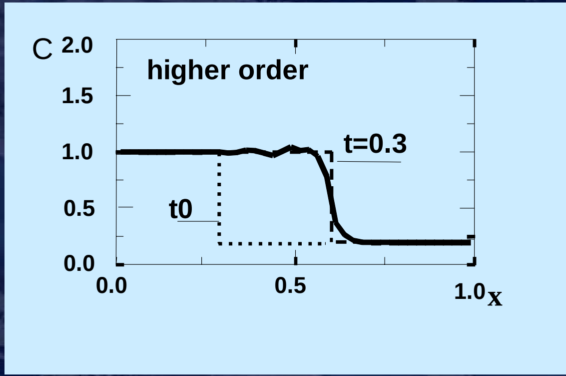
$C(x,0) = 0.2$ für $0 \le x \le 0.3$

und Randbedingung: $C(0,x) = 1.0$ und $u(0,t) = konst. = 1.0$









Zur Genauigkeit von Rechenschemen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$u(x_i, t_n)$ Richtige Lösung

U_i^n Näherungs Lösung

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + c\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$U_i^{n+1} = u + \Delta x \cdot u_x + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} + \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} + ...$$

$$U_{i-1}^n = u - \Delta x \cdot u_x + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} - \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} + ...$$

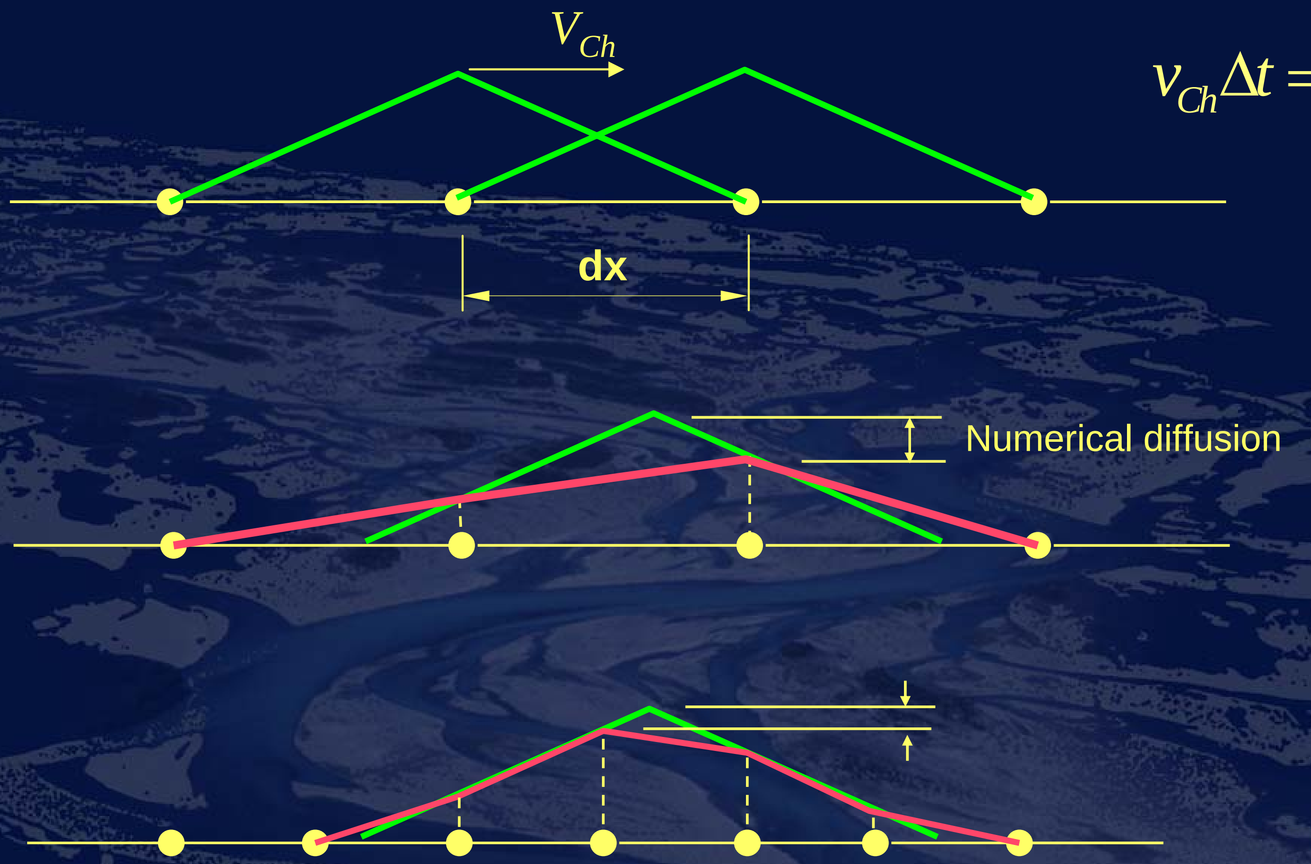
$$U_i^{n+1} = u + \Delta t \cdot u_t + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} + ...$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{-\frac{\Delta t}{2} u_{tt} - \frac{\Delta x^2}{6} u_{xx} + ...}_{\textit{Abbruchfehler}}$$

Fehler (numerische Diffusion) proportional zu Δt und Δx^2

1. Ordnung in der Zeit
2. Ordnung im Raum

Numerische Diffusion: Einfluss Gitter



$$v_{Ch}\Delta t = \Delta x$$

Schlussbemerkungen

Modell: Physik

$\Rightarrow$ Mathematik

$\Rightarrow$ Numerik

$\Rightarrow$ Randbed.

Ermessenspielraum $\Rightarrow$ Erfahrung

Keep it simple!

BASEMENT

Danke

Roland Fäh
faeh@vaw.baug.ethz.ch